Grundlagen der Elektrotechnik

Stern-Dreiecksumwandlung

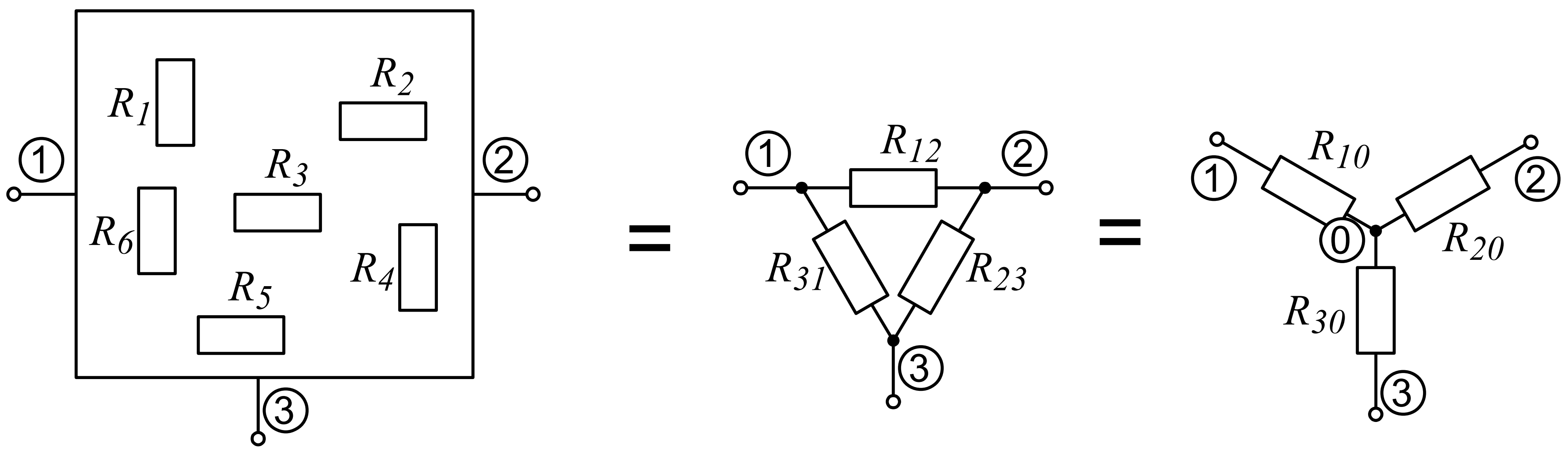
TH-Köln 2020

Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt

Stern-Dreiecks-Umwandlung

- Grundprinzip der Stern-Dreiecks-Umwandlung
- Herleitung mit extern gemessenen Widerständen
- Gleichungen zur Stern-Dreiecks-Umwandlung
- Stern-Vieleck-Umwandlung

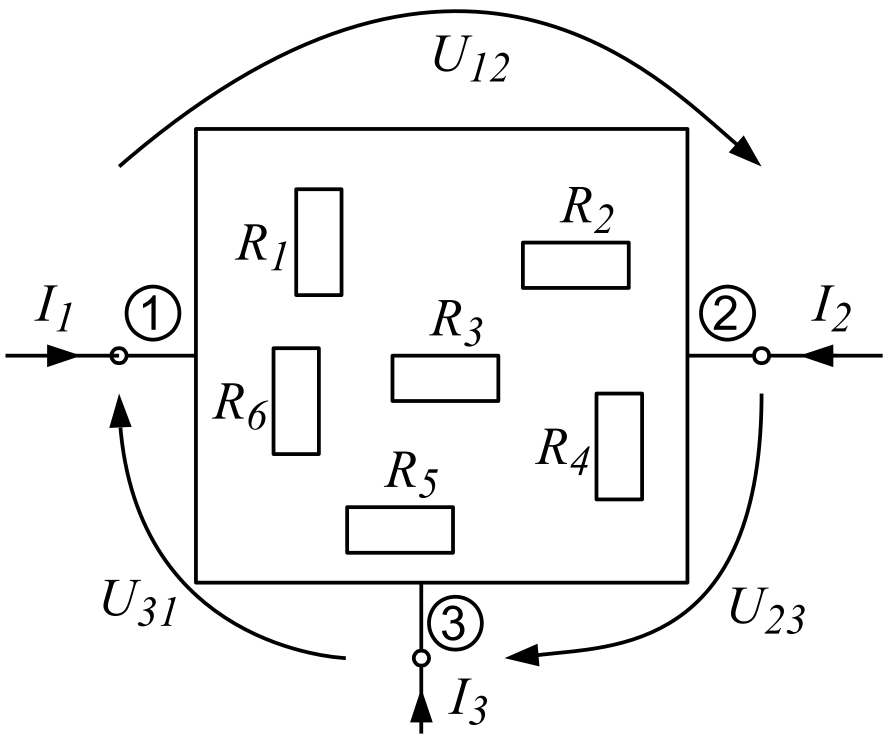
Passives Dreipol-Netzwerk

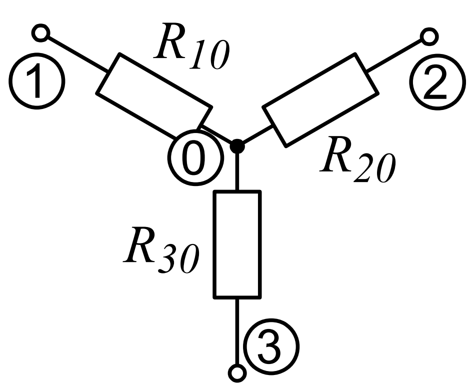


Passives Dreipol-Netzwerk

Ziel: Widerstände R10, R20, R30 ermitteln.

Methode:
1) Messen von 1 nach 2, dabei 3 offen lassen
2) Messen von 2 nach 3, dabei 1 offen lassen
3) Messen von 3 nach 1, dabei 2 offen lassen



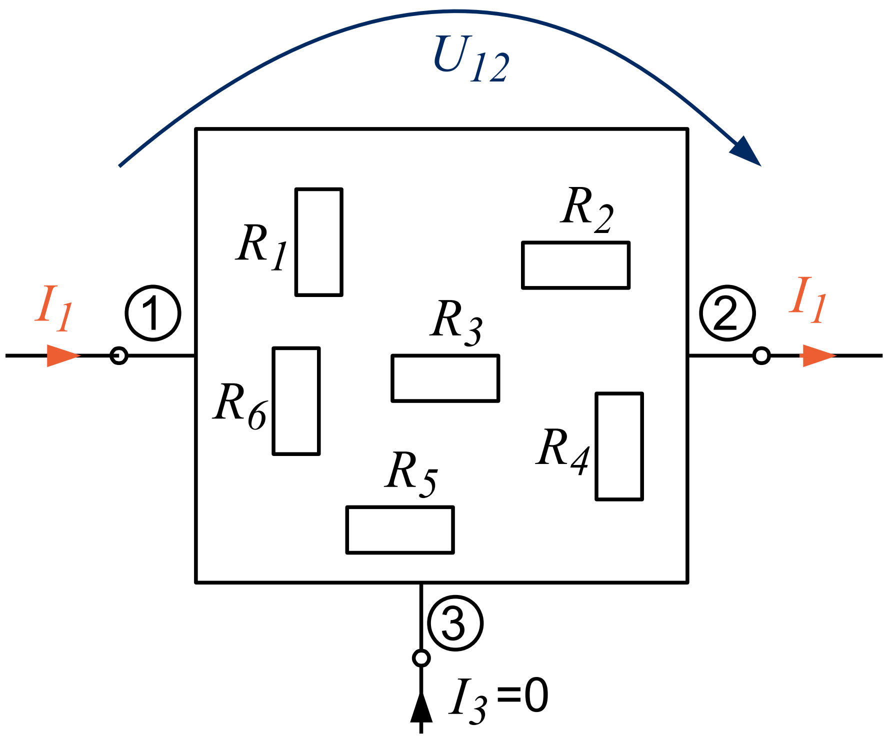


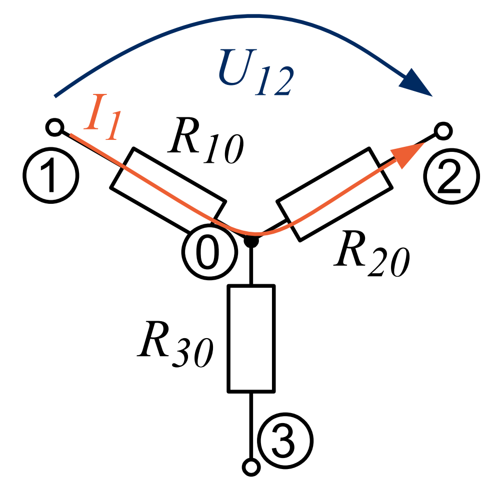
Passives Dreipol-Netzwerk

1) Messen von 1 nach 2, dabei 3 offen lassen:
Was messen wir genau?

$$\frac{U_{12}}{I_1} = R_{ext\,12} \neq R_{12}$$

$$R_{ext12} = R_{10} + R_{20}$$



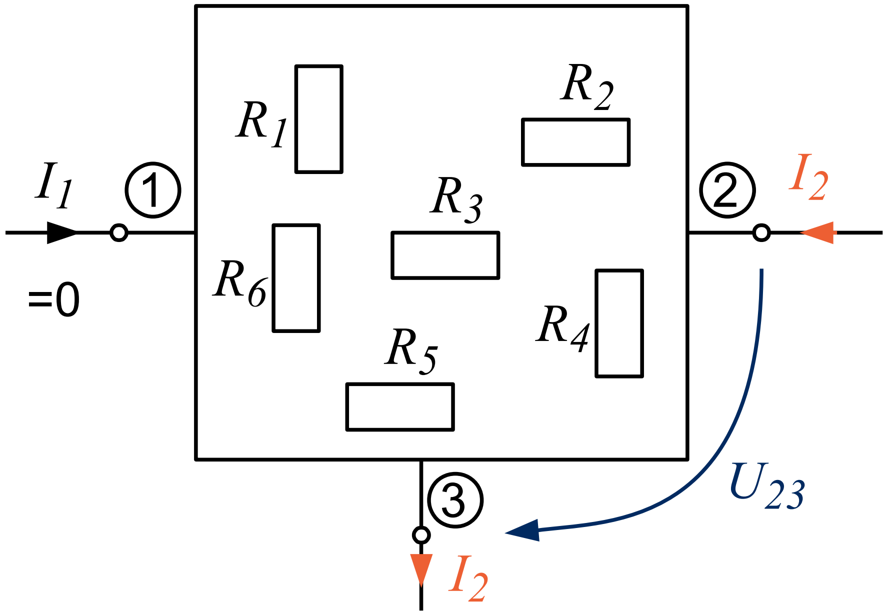


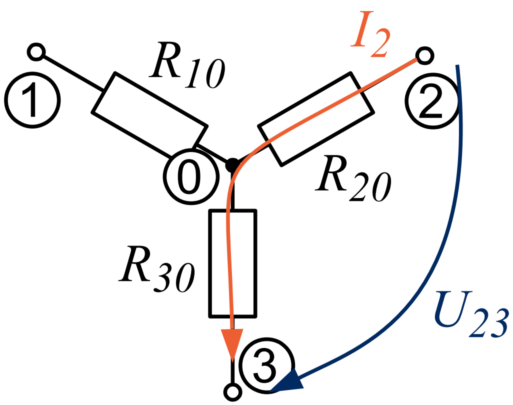
Passives Dreipol-Netzwerk

2) Messen von 2 nach 3, dabei 1 offen lassen:

$$\frac{U_{12}}{I_1} = R_{ext1} \qquad R_{ext12} = R_{10} + R_{20}$$

$$\frac{U_{23}}{I_2} = R_{ext2} \qquad R_{ext23} = R_{20} + R_{30}$$





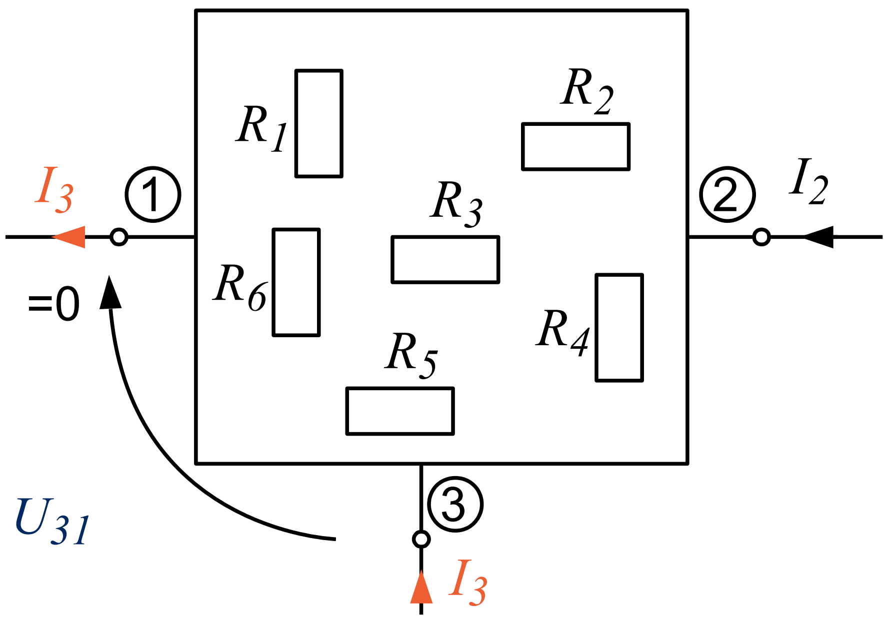
Passives Dreipol-Netzwerk

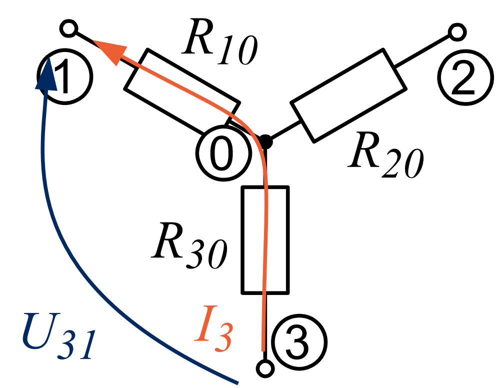
3) Messen von 3 nach 1, dabei 2 offen lassen:

$$\frac{U_{12}}{I_1} = R_{ext1} \qquad R_{ext12} = R_{10} + R_{20}$$

$$\frac{U_{23}}{I_2} = R_{ext2} \qquad R_{ext23} = \quad R_{20} + R_{30}$$

$$\frac{U_{31}}{I_3} = R_{ext31} \qquad R_{ext31} = R_{10} \quad + R_{30}$$





Passives Dreipol-Netzwerk

Lösen des Gleichungssystems:

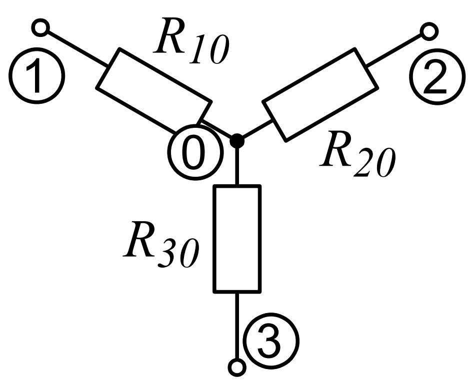
$$R_{ext12} = R_{10} + R_{20}$$
$$R_{ext23} = R_{20} + R_{30}$$
$$R_{ext31} = R_{10} + R_{30}$$

$\Rightarrow$

In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_{ext12} \\ R_{ext23} \\ R_{ext31} \end{pmatrix}}_{\vec{R}_{ext}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} R_{10} \\ R_{20} \\ R_{30} \end{pmatrix}}_{\vec{R}_0}$$

$$\vec{R}_{ext} = A \cdot \vec{R}_0$$



Formale Lösung:

$\Rightarrow$ $$\vec{R}_0 = A^{-1} \cdot \vec{R}_{ext}$$

Invertierte Matrix:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{10} \\ R_{20} \\ R_{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{ext12} \\ R_{ext23} \\ R_{ext31} \end{pmatrix}$$

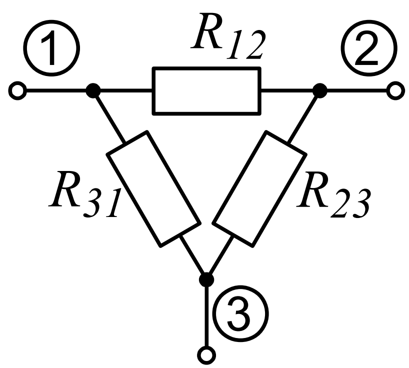
$\Leftarrow$

$$R_{10} = \frac{1}{2} \cdot \left(R_{ext12} - R_{ext23} + R_{ext31} \right)$$
$$R_{20} = \frac{1}{2} \cdot \left(R_{ext12} + R_{ext23} - R_{ext31} \right)$$
$$R_{30} = \frac{1}{2} \cdot \left(-R_{ext12} + R_{ext23} + R_{ext31} \right)$$

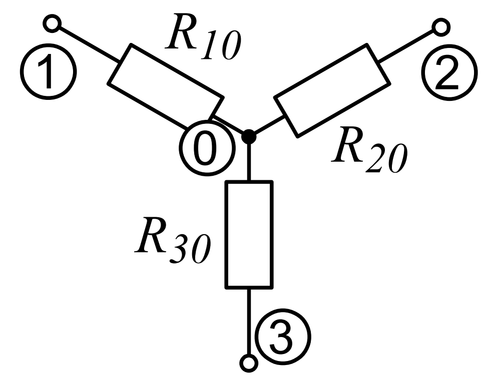
Stern-Dreieck-Umwandlung

Lösungsansatz:

1) Externe Widerstände R_{ext12}, R_{ext23}, R_{ext31} mit Dreieck berechnen (ähnlich wie Stern)
2) Externe Widerstände für Dreieck und Stern gleichsetzen.
3) Gleichungssystem nach Unbekannten auflösen.



=



$$R_{12}=R_{10}+R_{20}+\frac{R_{10}\cdot R_{20}}{R_{30}}$$

$$R_{10}=\frac{R_{12}\cdot R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

Zyklisches Vertauschen ergibt:

$$R_{23}=R_{20}+R_{30}+\frac{R_{20}\cdot R_{30}}{R_{10}}$$

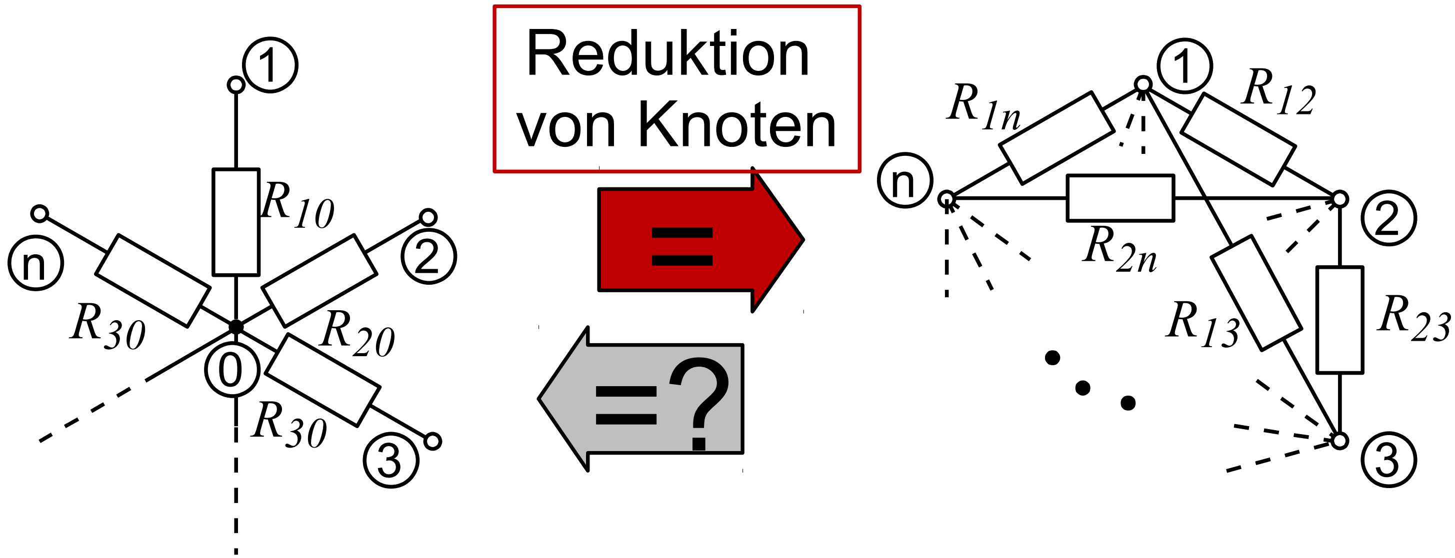
$$R_{31}=R_{30}+R_{10}+\frac{R_{30}\cdot R_{10}}{R_{20}}$$

Zyklisches Vertauschen ergibt:

$$R_{20}=\frac{R_{12}\cdot R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$$R_{30}=\frac{R_{23}\cdot R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

Stern-Vieleck-Umwandlung



(Rück)-Umwandlung Vieleck-Stern

Nicht eindeutig definiert!

Umwandlung Stern-Vieleck

mit Leitwerten $G = \frac{1}{R}$

ergibt:

$$G_{ij} = \frac{G_{i0} \cdot G_{j0}}{\sum_{k=1}^{n} G_{k0}} \qquad \text{mit } i, j = 1..n$$

Kontakt

Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt
Professur Elektrische Netze
Institut für Elektrische Energietechnik,
Fakultät für Informations-, Medien- und Elektrotechnik (F07)
Technische Hochschule Köln
Betzdorferstraße 2, Raum ZO 9-19
50679 Köln, Deutschland
Tel. +49 221 8275 2020
eberhard.waffenschmidt@th-koeln.de
https://www.th-koeln.de/personen/eberhard.waffenschmidt/