

# Grundlagen der Elektrotechnik



Rechenregeln für  
Komplexe Zahlen

TH-Köln 2020

Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt

# Rechenregeln für Komplexe Zahlen

- Betrag und Phase
- Addieren
- Multiplizieren
- Invertieren, Dividieren
- Differenzieren und Integrieren

# Rechenregeln

Umrechnen von Real- und Imaginärteil nach Betrag und Phase:

Betrag von  $\underline{U}$ :  $U_0 = |(\underline{U})| = \sqrt{U_{\text{re}}^2 + U_{\text{im}}^2}$

Phase von  $\underline{U}$ :  $\varphi = \arg(\underline{U}) = \arctan \frac{U_{\text{im}}}{U_{\text{re}}}$  *Aufpassen:*  
arctan nur für  $-90^\circ \dots +90^\circ$  definiert!

Umrechnen von Betrag und Phase nach Real- und Imaginärteil:

Realteil von  $\underline{U}$ :  $U_{\text{re}} = U_0 \cdot \cos(\varphi)$

Imaginärteil von  $\underline{U}$ :  $U_{\text{im}} = U_0 \cdot \sin(\varphi)$

# Rechenregeln: Addition

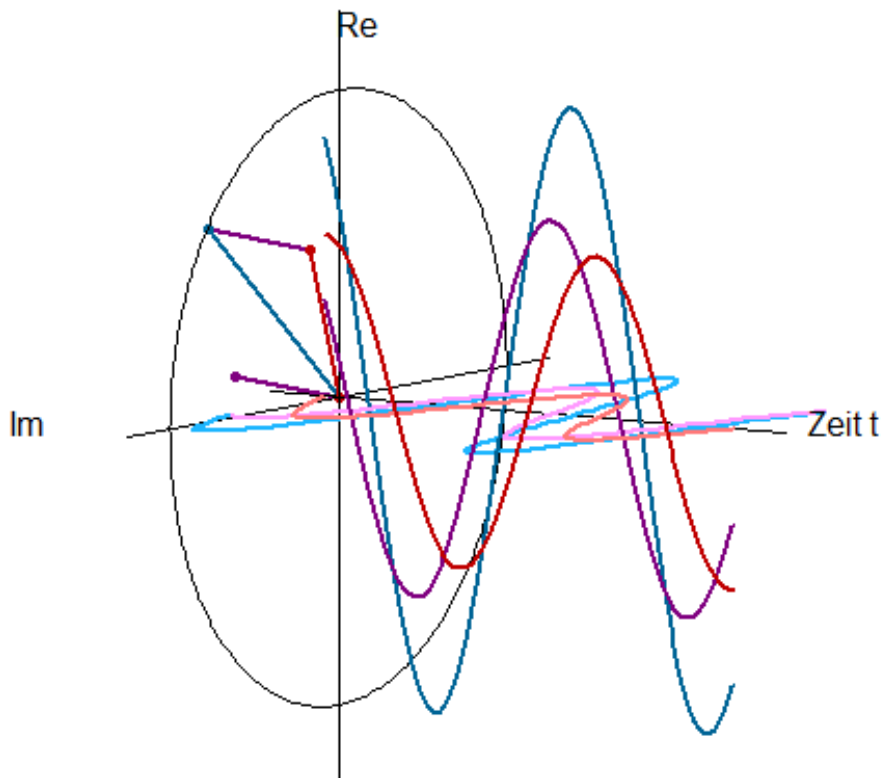
Komplexer Festzeiger::

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

Als Real- und Imaginärteil:  $U_{Re} + j \cdot U_{Im} = U_{Re1} + j \cdot U_{Im1} + U_{Re2} + j \cdot U_{Im2}$

$$U_{Re} + j \cdot U_{Im} = (U_{Re1} + U_{Re2}) + j \cdot (U_{Im1} + U_{Im2})$$

$$U_{Re} = U_{Re1} + U_{Re2} \quad U_{Im} = U_{Im1} + U_{Im2}$$



**Addiere Realteile und  
Imaginärteile einzeln!**

**Achtung: NICHT die Amplituden-  
Beträge addieren!**

# Rechenregeln: Multiplikation

Formal:

Beschreibung mit Betrag und Phase

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$$

$$Z \cdot e^{j\varphi} = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot Z_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$Z \cdot e^{j\varphi} = Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Multipliziere die Beträge,  
addiere die Phasen!

Beschreibung mit Real und Imaginärteil

$$Z_{Re} + jZ_{Im} = (Z_{Re1} + jZ_{Im1}) \cdot (Z_{Re2} + jZ_{Im2})$$

$$Z_{Re} + jZ_{Im} = (Z_{Re1}Z_{Re2} - Z_{Im1}Z_{Im2}) + j(Z_{Im1}Z_{Re2} + Z_{Im2}Z_{Re1})$$

$$Z_{Re} = Z_{Re1}Z_{Re2} - Z_{Im1}Z_{Im2} \quad Z_{Im} = Z_{Im1}Z_{Re2} + Z_{Im2}Z_{Re1}$$

# Rechenregeln: Multiplikation

Bedeutung:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$$

Komplexer Zeiger      komplexer Faktor

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \cdot \underline{C}$$

$$U \cdot e^{j\varphi} = U_1 \cdot C \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_c)}$$

Phase von  $\underline{C}$ :  
Bewirkt Phasenverschiebung bzw. Drehung des Zeigers

Betrag von  $\underline{C}$ :  
Bewirkt Stauchung oder Streckung der Amplitude

# Rechenregeln: Inversion

Formal:

Beschreibung mit Betrag und Phase

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{Z} \cdot e^{j\varphi} = \frac{1}{\underline{Z}_1 \cdot e^{j\varphi_1}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} \cdot e^{-j\varphi_1} \quad \rightarrow \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Z}_1} \quad \varphi = -\varphi_1$$

**Invertier den Betrag, negier die Phase!**

Beschreibung mit Real und Imaginärteil

$$\begin{aligned} Z_{\text{Re}} + j \cdot Z_{\text{Im}} &= \frac{1}{Z_{\text{Re}1} + j \cdot Z_{\text{Im}1}} \\ &= \frac{1}{Z_{\text{Re}1} + j \cdot Z_{\text{Im}1}} \cdot \frac{Z_{\text{Re}1} - j \cdot Z_{\text{Im}1}}{Z_{\text{Re}1} - j \cdot Z_{\text{Im}1}} \\ &= \frac{Z_{\text{Re}1}}{Z_{\text{Re}1}^2 + Z_{\text{Im}1}^2} - j \cdot \frac{Z_{\text{Im}1}}{Z_{\text{Re}1}^2 + Z_{\text{Im}1}^2} \end{aligned}$$

# Rechenregeln: Inversion

*Bedeutung:*

Wird vor allem für komplexe Faktoren verwendet

$$\underline{C} = \frac{1}{\underline{C}_1}$$

$$C \cdot e^{j\varphi} = \frac{1}{C_1} \cdot e^{-j\varphi_c}$$

Phase von  $\underline{C}$ :  
Phasenverschiebung bzw. Drehung des Zeigers umgekehrt

Betrag von  $\underline{C}$ :  
Ist invertiert



# Rechenregeln: Division

Formal:

Beschreibung mit Betrag und Phase

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$
$$Z \cdot e^{j\varphi} = \frac{Z_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{Z_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \rightarrow \quad Z = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

**Beträge dividieren, Phasen subtrahieren**

Beschreibung mit Real und Imaginärteil

$$\underline{Z} = \frac{Z_{\text{Re1}} + jZ_{\text{Im1}}}{Z_{\text{Re2}} + jZ_{\text{Im2}}} = \frac{Z_{\text{Re1}} \cdot Z_{\text{Re2}} + Z_{\text{Im1}} \cdot Z_{\text{Im2}}}{Z_{\text{Re2}}^2 + Z_{\text{Im2}}^2} + j \cdot \frac{Z_{\text{Im1}} \cdot Z_{\text{Re2}} - Z_{\text{Re1}} \cdot Z_{\text{Im2}}}{Z_{\text{Re2}}^2 + Z_{\text{Im2}}^2}$$

Bedeutung:

Ähnlich wie Multiplikation

# Differenzieren und Integrieren

Zum Differenzieren und Integrieren nach der Zeit Zeitfunktion betrachten:

$$\underline{U}(t) = U_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Differenzieren

$$\frac{d\underline{U}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} U_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \cdot U_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Integrieren

$$\int \underline{U}(t) dt = \int U_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} dt = \frac{1}{j\omega} \cdot U_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$



Für komplexer Festzeiger:

$$\underline{U}' = j\omega \cdot \underline{U}$$

$$\int \underline{U} dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{U}$$

Differenzieren entspricht einfacher Multiplikation mit  $j$  und  $\omega$

Integrieren entspricht einfacher Division mit  $j$  und  $\omega$

*Bedeutung:*

Phasenverschiebung um  $90^\circ$  und Amplitude mit Faktor erhöhen

*Bedeutung:*

Phasenverschiebung um  $-90^\circ$  und Amplitude mit Faktor erniedrigen

# Komplexe Zahlen für die Wechselstromrechnung

Welche **Vorteile** haben Sie kennengelernt?

- Einfache Addition und Multiplikation
- Grundrechenarten bleiben erhalten
- Differentiation und Integration über der Zeit wird zur Multiplikation bzw. Division.

# Kontakt

## **Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt**

Professur Elektrische Netze

Institut für Elektrische Energietechnik,  
Fakultät für Informations-, Medien- und  
Elektrotechnik (F07)

Technische Hochschule Köln

Betzdorferstraße 2, Raum ZO 9-19

50679 Köln, Deutschland

Tel. +49 221 8275 2020

**[eberhard.waffenschmidt@th-koeln.de](mailto:eberhard.waffenschmidt@th-koeln.de)**

<https://www.th-koeln.de/>

[personen/eberhard.waffenschmidt/](https://www.th-koeln.de/personen/eberhard.waffenschmidt/)

