Elektrische Netze

Leitungen - Wellenwiderstand

Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt

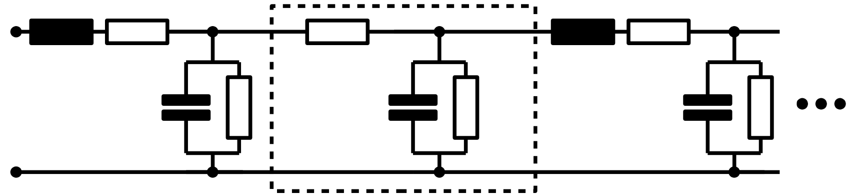
TH-Köln 2023

Wellenwiderstand und stehende Wellen

- Wellenwiderstand
- Leitungsgleichungen für verlustarme Leitungen
- Stehende Wellen
- λ/4-Transformation
- Anpassung
- Natürliche Leistung

CC BY NC SA

Wellenwiderstand



Leitungsgleichungen:

$$\underline{U}(x)=\underline{U}_1\cdot e^{-\gamma x}+\underline{U}_2\cdot e^{\gamma x}$$
$$\underline{I}(x)=\underline{I}_1\cdot e^{-\gamma x}+\underline{I}_2\cdot e^{\gamma x}$$

mit $\gamma=\sqrt{(R'+j\omega L')\cdot(G'+j\omega C')}$

Spannung: $\underline{U}_h(x)=\underline{U}_1\cdot e^{-\gamma x}$ $\quad$ $\underline{U}_r(x)=\underline{U}_2\cdot e^{+\gamma x}$

Strom: $\underline{I}_h(x)=\underline{I}_1\cdot e^{-\gamma x}$ $\quad$ $\underline{I}_r(x)=\underline{I}_2\cdot e^{+\gamma x}$

Verknüpfung: $\dfrac{\underline{U}_h(x)}{\underline{I}_h(x)}=\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}=\underline{Z}_C$ $\quad$ $\dfrac{\underline{U}_r(x)}{\underline{I}_r(x)}=\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}=-\underline{Z}_C$

Wellenwiderstand:

$$\boxed{\underline{Z}_C=\sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}}\approx\sqrt{\frac{L'}{C'}}}$$

Für verlustarme Leitungen

Verknüpfte Leitungsgleichungen:

$$\underline{U}(x)=\underline{U}_1\cdot e^{-\gamma x}+\underline{U}_2\cdot e^{\gamma x}$$
$$\underline{I}(x)=\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C}\cdot e^{-\gamma x}-\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C}\cdot e^{\gamma x}$$

Technology Arts Sciences TH Köln

Spezielle Leitungsgleichung

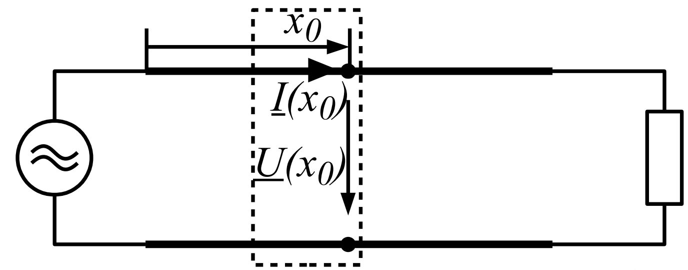
Für spezielle Position x_0

$$\underline{U}(x_0)=\underline{U}_1\cdot e^{-\gamma x_0}+\underline{U}_2\cdot e^{\gamma x_0}$$
$$\underline{Z}_C\cdot\underline{I}(x_0)=\underline{U}_1\cdot e^{-\gamma x_0}-\underline{U}_2\cdot e^{\gamma x_0}$$

Gl. addieren:
$$\underline{U}_1=\frac{\underline{U}(x_0)+\underline{Z}_C\cdot\underline{I}(x_0)}{2}e^{+\gamma x_0}$$

Gl. subtrahieren:
$$\underline{U}_2=\frac{\underline{U}(x_0)-\underline{Z}_C\cdot\underline{I}(x_0)}{2}e^{-\gamma x_0}$$

Randbedingungen:
Spannung und Strom bei x_0 bekannt



$$\underline{U}(x)=\underline{U}(x_0)\cdot\cosh[\gamma(x_0-x)]+\underline{Z}_C\cdot\underline{I}(x_0)\cdot\sinh[\gamma(x_0-x)]$$
$$\underline{I}(x)=\underline{I}(x_0)\cdot\cosh[\gamma(x_0-x)]+\frac{\underline{U}(x_0)}{\underline{Z}_C}\cdot\sinh[\gamma(x_0-x)]$$

mit Definion:
$$\sinh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$
$$\cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

Für verlustarme Leitungen

$$\alpha\to 0 \qquad \Rightarrow\gamma\approx 0+j\beta$$

$$\underline{U}(x)=\underline{U}(x_0)\cdot\cos[\beta(x_0-x)]+j\cdot Z_C\cdot\underline{I}(x_0)\cdot\sin[\beta(x_0-x)]$$
$$\underline{I}(x)=\underline{I}(x_0)\cdot\cos[\beta(x_0-x)]+j\cdot\frac{\underline{U}(x_0)}{Z_C}\cdot\sin[\beta(x_0-x)]$$

mit
$$\beta\approx\omega\cdot\sqrt{L'\cdot C'}$$
$$Z_C\approx\sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Technology Arts Sciences
TH Köln

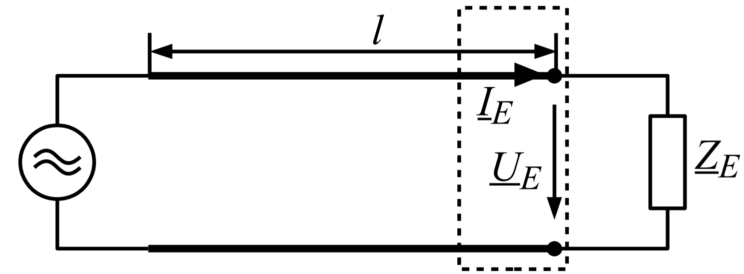
Spezialfälle

Verlustarme Leitungen

Spannung $\underline{U}_E$ und Strom $\underline{I}_E$ am Ende bekannt:

$$\underline{U}(x)=\underline{U}_E\cdot\cos[\beta(l-x)]+j\cdot Z_C\cdot\underline{I}_E\cdot\sin[\beta(l-x)]$$

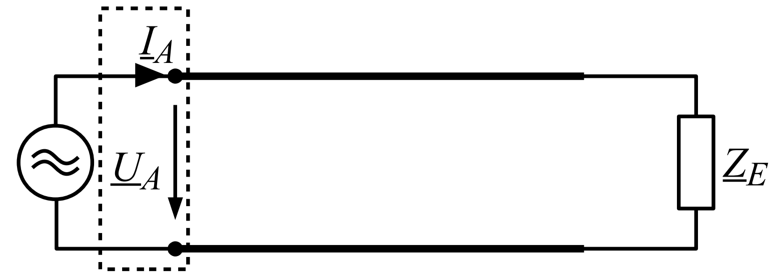
$$\underline{I}(x)=\underline{I}_E\cdot\cos[\beta(l-x)]+j\cdot\frac{\underline{U}_E}{Z_C}\cdot\sin[\beta(l-x)]$$



Spannung $\underline{U}_A$ und Strom $\underline{I}_A$ am Anfang bekannt:

$$\underline{U}(x)=\underline{U}_A\cdot\cos(\beta x)-j\cdot Z_C\cdot\underline{I}_A\cdot\sin(\beta x)$$

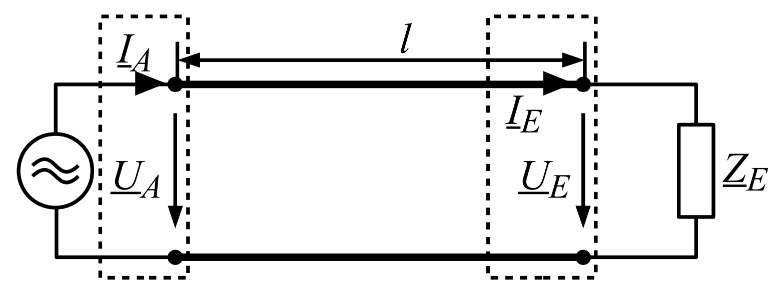
$$\underline{I}(x)=\underline{I}_A\cdot\cos(\beta x)-j\cdot\frac{\underline{U}_A}{Z_C}\cdot\sin(\beta x)$$



Spannung $\underline{U}_E$ und Strom $\underline{I}_E$ am Ende bekannt,
Spannung $\underline{U}_A$ und Strom $\underline{I}_A$ am Anfang berechnen:

$$\underline{U}_A=\underline{U}_E\cdot\cos(\beta l)+j\cdot Z_C\cdot\underline{I}_E\cdot\sin(\beta l)$$

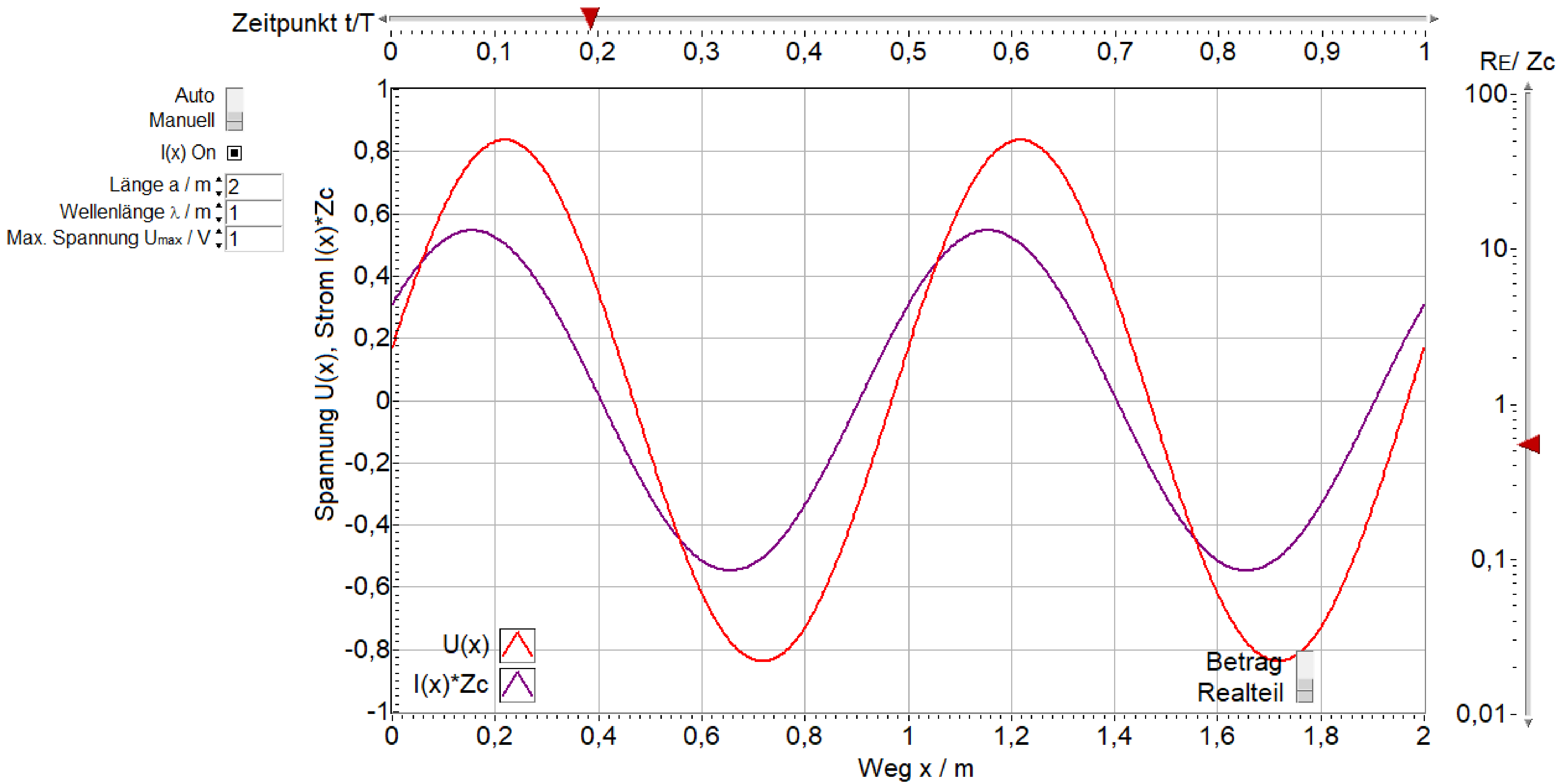
$$\underline{I}_A=\underline{I}_E\cdot\cos(\beta l)+j\cdot\frac{\underline{U}_E}{Z_C}\cdot\sin(\beta l)$$



cc BY NC SA

Technology Arts Sciences
TH Köln

Wellenausbreitung
Spannung am Ende vorgegeben

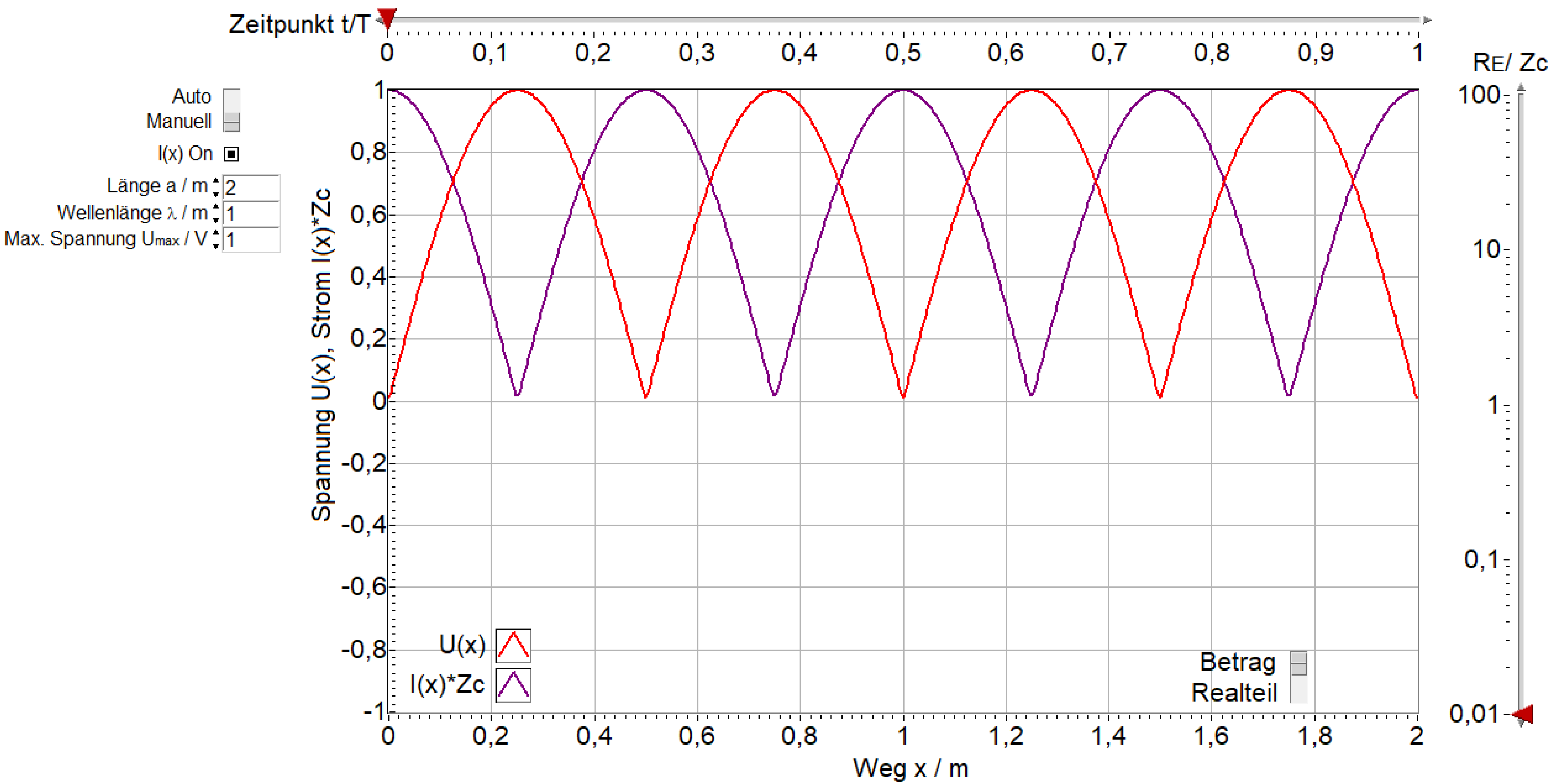


Technology Arts Sciences TH Köln

Technology Arts Sciences TH Köln

Stehende Wellen

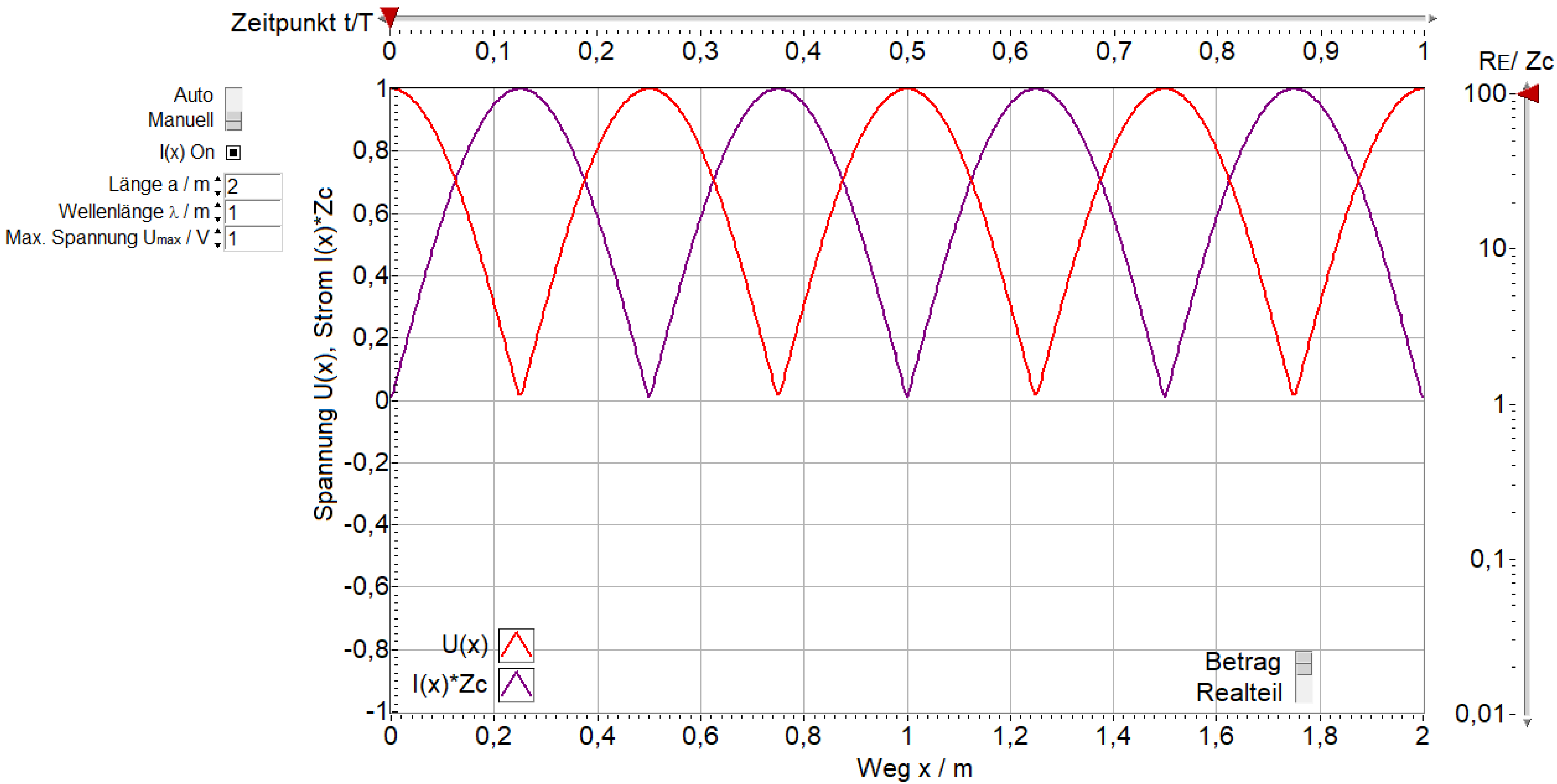
Kurzschluss am Ende



Technology Arts Sciences TH Köln
Technology Arts Sciences TH Köln

Stehende Wellen

Leerlauf am Ende

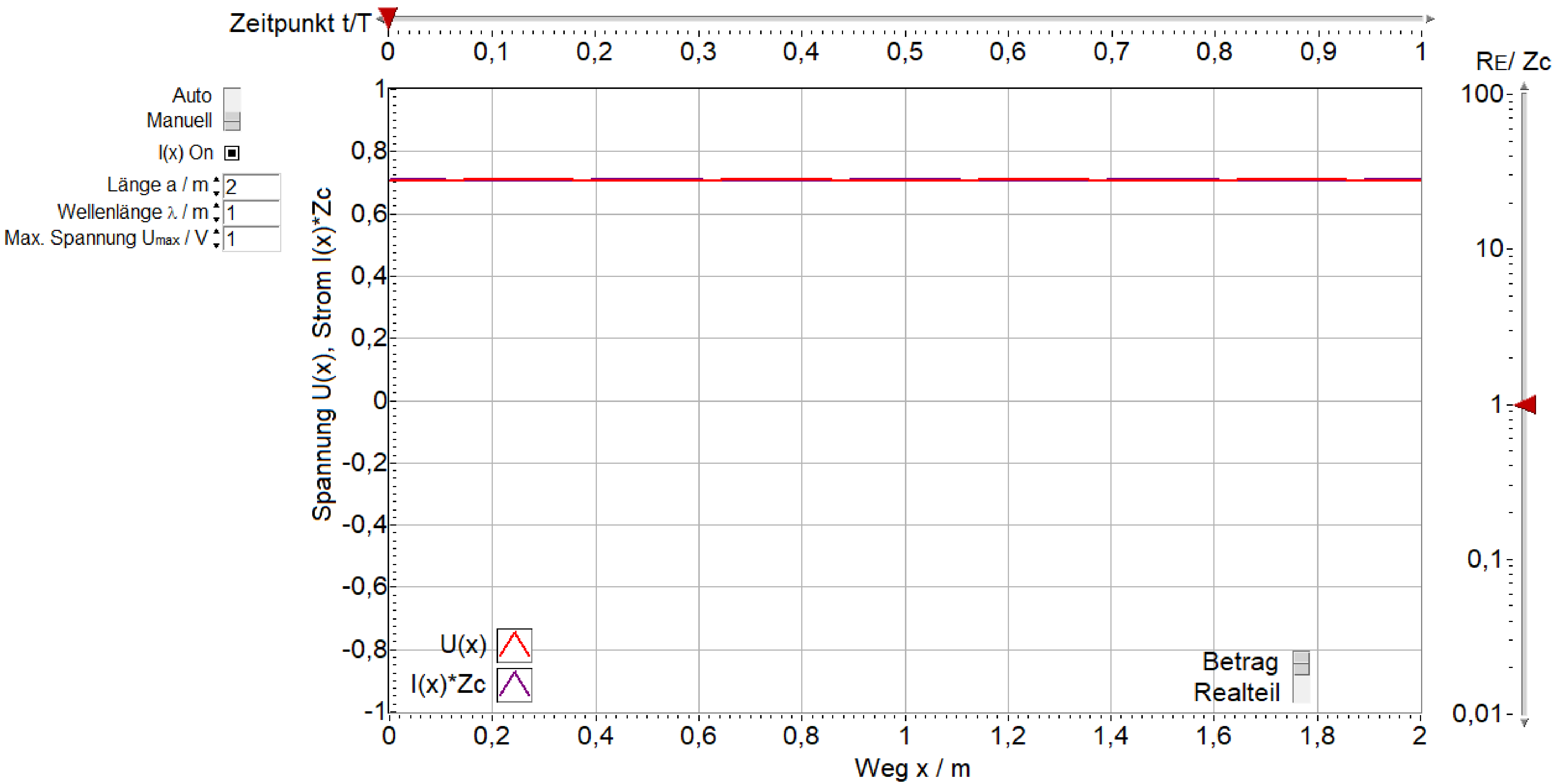


Technology Arts Sciences TH Köln

Technology Arts Sciences TH Köln

Stehende Wellen

Wellenwiderstand am Ende



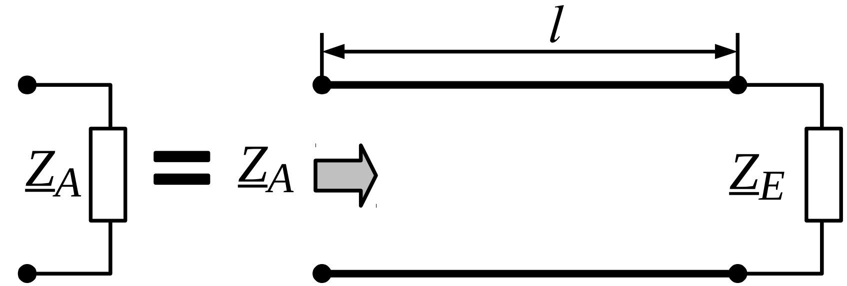
Technology Arts Sciences TH Köln

Technology Arts Sciences TH Köln

Eingangswiderstand

Impedanz $\underline{Z}_E$ am Ende bekannt,
Äquivalente Impedanz am Anfang $\underline{Z}_A$ berechnen:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_C \cdot \frac{\underline{Z}_E \cdot \cos(\beta l) + j \cdot \underline{Z}_C \cdot \sin(\beta l)}{\underline{Z}_C \cdot \cos(\beta l) + j \cdot \underline{Z}_E \cdot \sin(\beta l)}$$



Spezialfälle

Kurzschluss:

$\underline{Z}_E \rightarrow 0$ $\qquad$ $\underline{Z}_A = j \cdot \underline{Z}_C \cdot \tan(\beta l)$

Unterbrechung:

$\underline{Z}_E \rightarrow \infty$ $\qquad$ $\underline{Z}_A = -j \cdot \underline{Z}_C \cdot \frac{1}{\tan(\beta l)}$

Anpassung:

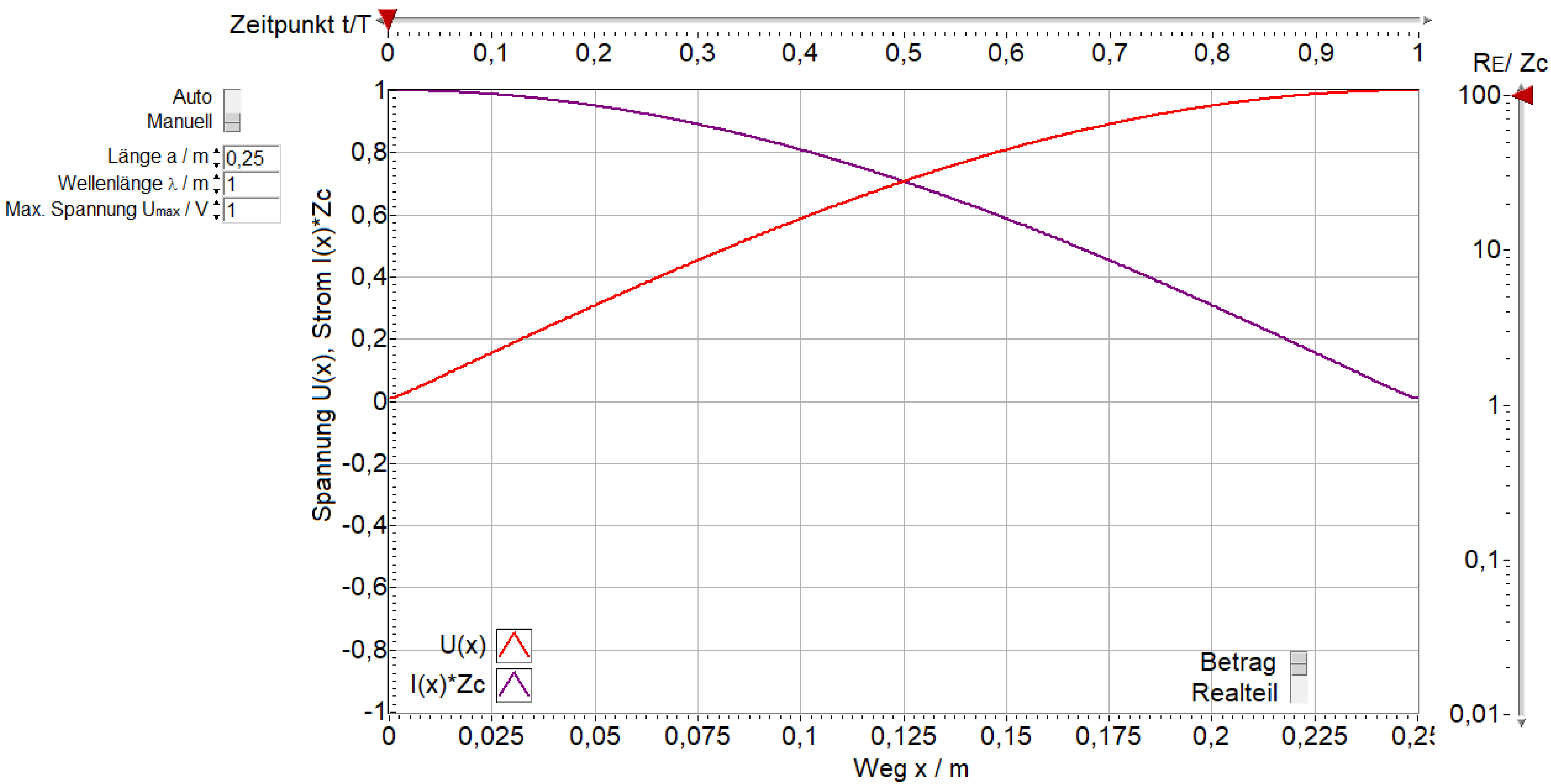
$\underline{Z}_E = \underline{Z}_C$ $\qquad$ $\underline{Z}_A = \underline{Z}_C$

Unabhängig von der Länge l

CC BY NC SA
Technology Arts Sciences TH Köln

λ/4-Transformation

Länge *l* entspricht 1/4 der Wellenlänge λ:



Technology
Arts Sciences
TH Köln

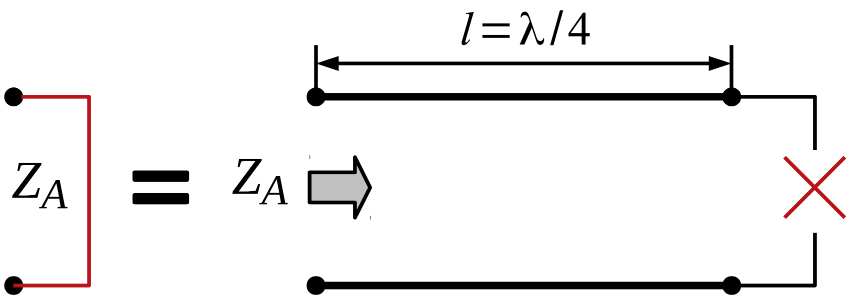
$\lambda/4$-Transformation

Länge l entspricht 1/4 der Wellenlänge λ:

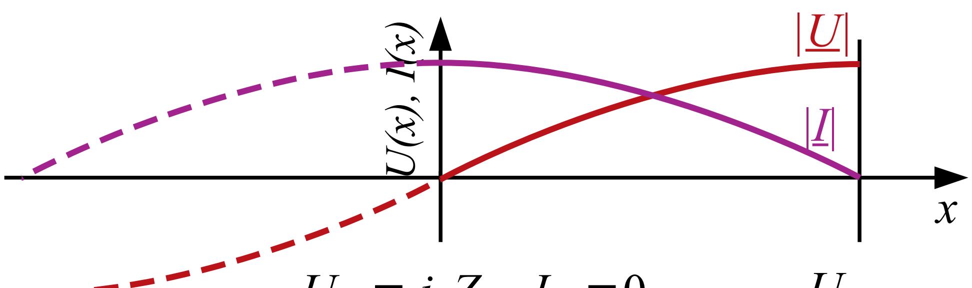
$$l=\lambda/4: \quad \beta l=\frac{\pi}{2} \rightarrow \cos(\beta l)=0, \sin(\beta l)=1 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \underline{U}_A = j\cdot Z_C\cdot \underline{I}_E \\ \underline{I}_A = j\cdot \underline{U}_E / Z_C \end{matrix} \quad \rightarrow Z_A=\frac{Z_C^2}{Z_E}$$

Ende offen:

Kurzschluss — Unterbrechung



$$Z_A=\frac{Z_C^2}{\infty}\rightarrow 0 \qquad Z_E\rightarrow\infty$$

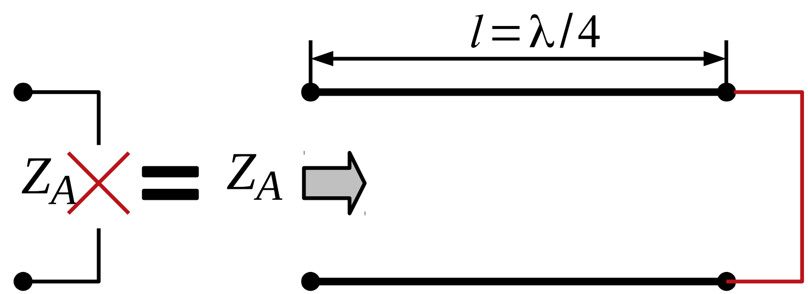


$$\underline{U}_A = j\cdot Z_C\cdot \underline{I}_E = 0 \qquad \underline{U}_E$$

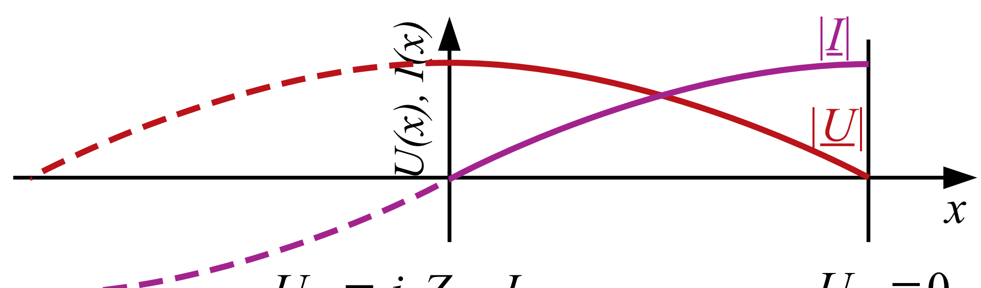
$$\underline{I}_A = +j\cdot\frac{\underline{U}_E}{Z_C} \qquad \underline{I}_E = 0$$

Ende verbunden:

Unterbrechung — Kurzschluss



$$Z_A=\frac{Z_C^2}{0}\rightarrow \infty \qquad Z_E\rightarrow 0$$



$$\underline{U}_A = j\cdot Z_C\cdot \underline{I}_E \qquad \underline{U}_E = 0$$

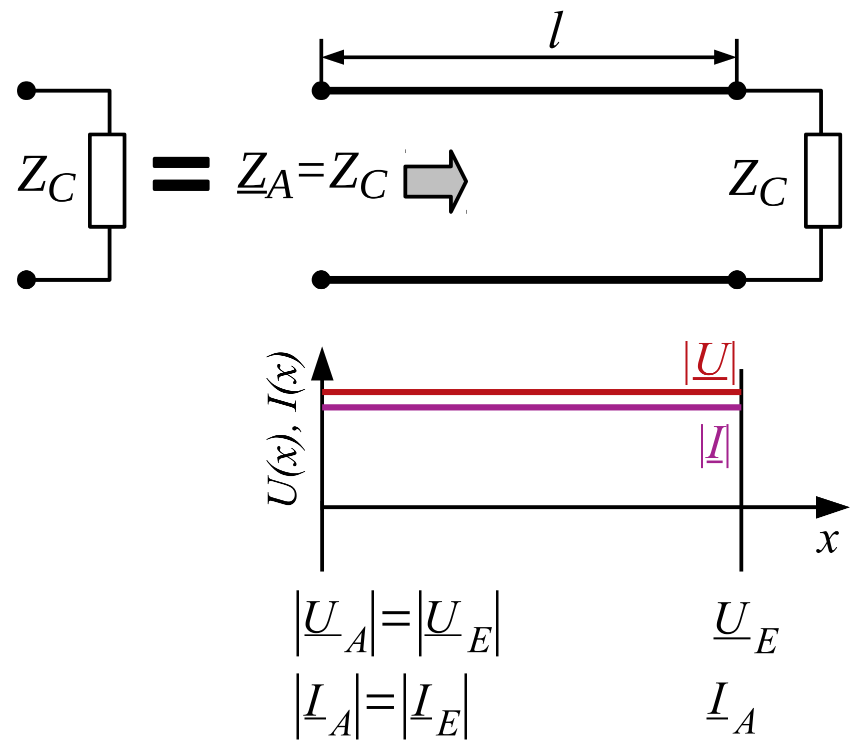
$$\underline{I}_A = +j\cdot\frac{\underline{U}_E}{Z_C} = 0 \qquad \underline{I}_E$$

cc BY NC SA

Anpassung

Abschluss mit
Wellenwiderstand Z_C :

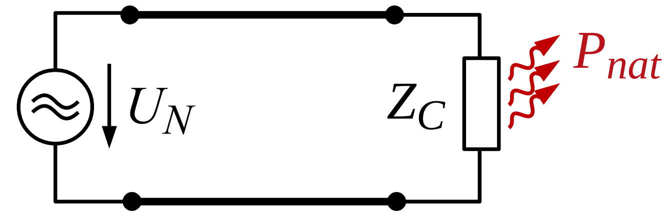
- Eingangswiderstand
  Z_A = rein reell
  = Wellenwiderstand Z_C
- Keine Resonanzen und Spannungsüberhöhungen
- Keine Blindleistung
- Unabhängig von Leitungslänge oder Wellenlänge



Technology Arts Sciences
TH Köln

Natürliche Leistung

- **Natürliche Leistung P_{nat}** wird übertragen:
- Bei Abschluss mit **Wellenwiderstand Z_C**
  - $P > P_{nat}$: Übernatürlich
  - $P < P_{nat}$: Unternatürlich
  - Nicht die maximale Leistung einer Leitung
  - Nicht vergleichbar mit Leistungsanpassung



$$P_{nat} = \frac{U_N^2}{Z_C}$$

Dreiphasig:

$$P_{nat} = \frac{3 \cdot U_{Ph}^2}{Z_C} = \frac{U_N^2}{Z_C}$$

Technology Arts Sciences
TH Köln

Kontakt

Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt
Professur Elektrische Netze
Fakultät für Informations-, Medien- und Elektrotechnik (F07)
Technische Hochschule Köln
Betzdorferstraße 2, Raum ZO 9-19
50679 Köln, Deutschland
Tel. +49 221 8275 2020
eberhard.waffenschmidt@th-koeln.de
https://www.th-koeln.de/personen/eberhard.waffenschmidt/

Lizenzbedingungen:

Diese Präsentation zur Vorlesung *Elektrische Netze*
wird veröffentlicht von Eberhard Waffenschmidt unter der

Common Creatives Lizenz cc by nc sa

Sie dürfen:
- Das Material teilen und bearbeiten

Unter folgenden Bedingungen:
- Namensnennung
- Nicht für kommerzielle Zwecke
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen

Details siehe:
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/

Anhang

BY NC SA

Herleitung Wellenwiderstand

	Hinlaufende Welle	Rücklaufende Welle
Spannung:	$U_h(x)=U_1 \cdot e^{-\gamma x}$	$U_r(x)=U_2 \cdot e^{+\gamma x}$
Strom:	$I_h(x)=I_1 \cdot e^{-\gamma x}$	$I_r(x)=I_2 \cdot e^{+\gamma x}$
Verknüpfung:	$\frac{U_h(x)}{I_h(x)}=\frac{U_1}{I_1}$	$\frac{U_r(x)}{I_r(x)}=\frac{U_2}{I_2}$

$\gamma^2=(R'+j\omega L')\cdot(G'+j\omega C')$

Masche:

$$-\frac{dU_h}{dx}=I_h(x)\cdot(R'+j\omega L') \qquad -\frac{dU_r}{dx}=I_r(x)\cdot(R'+j\omega L')$$

Welle:

$$\frac{dU_h}{dx}=-\gamma\cdot U_1\cdot e^{-\gamma x} \qquad \frac{dU_r}{dx}=+\gamma\cdot U_2\cdot e^{\gamma x}$$

$$\frac{dU_h}{dx}=-\gamma\cdot U_h(x) \qquad \frac{dU_r}{dx}=+\gamma\cdot U_r(x)$$

$$-\gamma\cdot U_h(x)=-I_h(x)\cdot(R'+j\omega L') \qquad +\gamma\cdot U_r(x)=-I_r(x)\cdot(R'+j\omega L')$$

$$\frac{U_h(x)}{I_h(x)}=\frac{(R'+j\omega L')}{\gamma} \qquad \frac{U_r(x)}{I_r(x)}=-\frac{(R'+j\omega L')}{\gamma}$$

$$\frac{U_h(x)}{I_h(x)}=\sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}} \qquad \frac{U_r(x)}{I_r(x)}=-\sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}}$$

Definiere:

$$Z_C=\sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}}=\frac{U_h(x)}{I_h(x)}=\frac{U_1}{I_1} \qquad Z_C=\sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}}=-\frac{U_r(x)}{I_r(x)}=-\frac{U_2}{I_2}$$

CC BY NC SA

Herleitung spezielle Leitungsgleichung

Für spezielle Position x_0

$$U(x_0)=U_1\cdot e^{-\gamma x_0}+U_2\cdot e^{\gamma x_0}$$

$$Z_C\cdot I(x_0)=U_1\cdot e^{-\gamma x_0}-U_2\cdot e^{\gamma x_0}$$

Gl. addieren: $U(x_0)+Z_C\cdot I(x_0)=2\cdot U_1\cdot e^{-\gamma x_0}$ $\Rightarrow$ $U_1=\frac{U(x_0)+Z_C\cdot I(x_0)}{2}e^{+\gamma x_0}$

Gl. subtrahieren: $U(x_0)-Z_C\cdot I(x_0)=2\cdot U_1\cdot e^{+\gamma x_0}$ $\Rightarrow$ $U_2=\frac{U(x_0)-Z_C\cdot I(x_0)}{2}e^{-\gamma x_0}$

Allg. Leitungsgleichung für Spannung: $U(x)=U_1\cdot e^{-\gamma x}+U_2\cdot e^{+\gamma x}$

Konst. einsetzen: $U(x)=\overbrace{\frac{U(x_0)+Z_C\cdot I(x_0)}{2}\cdot e^{+\gamma x_0}}^{U_1}\cdot e^{-\gamma x}+\overbrace{\frac{U(x_0)-Z_C\cdot I(x_0)}{2}\cdot e^{-\gamma x_0}}^{U_2}\cdot e^{+\gamma x}$

Umsortieren: $U(x)=U(x_0)\cdot\frac{1}{2}\cdot[e^{+\gamma(x_0-x)}+e^{-\gamma(x_0-x)}]+Z_C\cdot I(x_0)\cdot\frac{1}{2}\cdot[e^{+\gamma(x_0-x)}-e^{-\gamma(x_0-x)}]$

cosh und sinh nutzen: $U(x)=U(x_0)\cdot\cosh[\gamma(x_0-x)]+Z_C\cdot I(x_0)\cdot\sinh[\gamma(x_0-x)]$

Definion:

$$\boxed{\sinh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2} \qquad \cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}}$$

Allg. Leitungsgleichung für Strom: $I(x)=\frac{U_1}{Z_C}\cdot e^{-\gamma x}-\frac{U_2}{Z_C}\cdot e^{+\gamma x}$

Konst. einsetzen: $I(x)=\frac{U(x_0)/Z_C+I(x_0)}{2}\cdot e^{+\gamma x_0}\cdot e^{-\gamma x}-\frac{U(x_0)/Z_C-I(x_0)}{2}\cdot e^{-\gamma x_0}\cdot e^{+\gamma x}$

Umsortieren: $I(x)=\frac{U(x_0)}{Z_C}\cdot\frac{1}{2}\cdot[e^{+\gamma(x_0-x)}-e^{-\gamma(x_0-x)}]+I(x_0)\cdot\frac{1}{2}\cdot[e^{+\gamma(x_0-x)}+e^{-\gamma(x_0-x)}]$

cosh und sinh nutzen: $I(x)=\frac{U(x_0)}{Z_C}\cdot\sinh[\gamma(x_0-x)]+I(x_0)\cdot\cosh[\gamma(x_0-x)]$

Nochmal umsetzen: $I(x)=I(x_0)\cdot\cosh[\gamma(x_0-x)]+\frac{U(x_0)}{Z_C}\cdot\sinh[\gamma(x_0-x)]$

CC BY NC SA

Technology Arts Sciences TH Köln

Vereinfachung für verlustlose Leitungen

Leitungsgleichung Spannung

$$U(x)=U(x_0)\cdot\cosh[\gamma(x_0-x)]+Z_C\cdot I(x_0)\cdot\sinh[\gamma(x_0-x)]$$

Hyperbolicus ersetzen

$$U(x)=U(x_0)\cdot\cos[j\gamma(x_0-x)]+Z_C\cdot I(x_0)\cdot(-j\sin[j\gamma(x_0-x)])$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sinh(z)&=-j\sin(jz)\\ \cosh(z)&=\cos(jz)\end{aligned}}$$

Verlustarm: $\alpha\rightarrow 0$ $\quad\gamma\approx 0+j\beta$

Einsetzen:

$$U(x)=U(x_0)\cdot\cos[-\beta(x_0-x)]+Z_C\cdot I(x_0)\cdot(-j\sin[-\beta(x_0-x)])$$

$$\cos(-x)=\cos(+x)$$

$$\sin(-x)=-\sin(+x)$$

$$-\sin(-x)=+\sin(+x)$$

Vorzeichen verrechnen:

$$U(x)=U(x_0)\cdot\cos[+\beta(x_0-x)]+Z_C\cdot I(x_0)\cdot j\sin[+\beta(x_0-x)]$$

$$U(x)=U(x_0)\cdot\cos[\beta(x_0-x)]+j\cdot Z_C\cdot I(x_0)\cdot\sin[\beta(x_0-x)]$$

Leitungsgleichung Strom

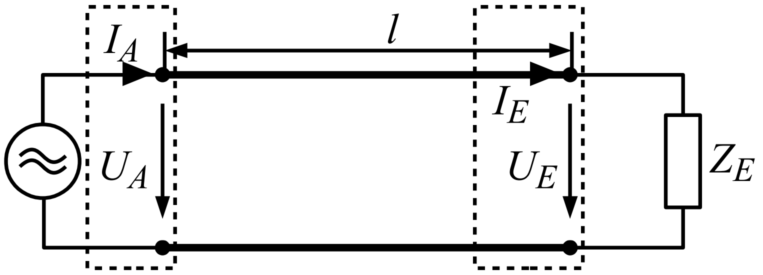
$$I(x)=I(x_0)\cdot\cosh[\gamma(x_0-x)]+\frac{U(x_0)}{Z_C}\cdot\sinh[\gamma(x_0-x)]$$

Äquivalent wie oben:

$$I(x)=I(x_0)\cdot\cos[\beta(x_0-x)]+j\cdot\frac{U(x_0)}{Z_C}\cdot\sin[\beta(x_0-x)]$$

CC BY NC SA

Herleitung Eingangsimpedanz



$$\frac{U_A}{I_A}=\frac{U_E\cdot\cos(\beta l)+j\cdot\frac{Z_C}{Z_E}\cdot U_E\cdot\sin(\beta l)}{\frac{U_E}{Z_E}\cdot\cos(\beta l)+j\cdot\frac{U_E}{Z_C}\cdot\sin(\beta l)}$$

$$Z_A=\frac{\cos(\beta l)+j\cdot\frac{Z_C}{Z_E}\cdot\sin(\beta l)}{\frac{1}{Z_E}\cdot\cos(\beta l)+j\cdot\frac{1}{Z_C}\cdot\sin(\beta l)}$$

$$Z_A=Z_C\cdot\frac{Z_E\cdot\cos(\beta l)+j\cdot Z_C\cdot\sin(\beta l)}{Z_C\cdot\cos(\beta l)+j\cdot Z_E\cdot\sin(\beta l)}$$

$$Z_A=Z_E\cdot\frac{1+j\cdot\frac{Z_C}{Z_E}\cdot\frac{\sin(\beta l)}{\cos(\beta l)}}{1+j\cdot\frac{Z_E}{Z_C}\cdot\frac{\sin(\beta l)}{\cos(\beta l)}}$$

$$Z_A=Z_E\cdot\frac{1+j\cdot\frac{Z_C}{Z_E}\cdot\tan(\beta l)}{1+j\cdot\frac{Z_E}{Z_C}\cdot\tan(\beta l)}$$

$$Z_A=Z_C\frac{Z_E+j\cdot Z_C\cdot\tan(\beta l)}{Z_C+j\cdot Z_E\cdot\tan(\beta l)}$$

Technology Arts Sciences
TH Köln

Offene Leitung

Unterbrechung

$Z_E \rightarrow \infty$

$$Z_A = Z_C \cdot \frac{Z_E \cdot \cos(\beta l) + j \cdot Z_C \cdot \sin(\beta l)}{Z_C \cdot \cos(\beta l) + j \cdot Z_E \cdot \sin(\beta l)}$$

$$Z_A = Z_C \cdot \frac{\cos(\beta l) + j \cdot \frac{Z_C}{Z_E} \cdot \sin(\beta l)}{\frac{Z_C}{Z_E} \cdot \cos(\beta l) + j \cdot \sin(\beta l)}$$

$$Z_A = Z_C \cdot \frac{\cos(\beta l) + j \cdot \frac{Z_C}{\infty} \cdot \sin(\beta l)}{\frac{Z_C}{\infty} \cdot \cos(\beta l) + j \cdot \sin(\beta l)}$$

$$Z_A = Z_C \cdot \frac{1}{j \cdot \tan(\beta l)}$$

$$Z_A = -j \cdot Z_C \cdot \frac{1}{\tan(\beta l)}$$

$$Z_A = -j \cdot Z_C \cdot \cot(\beta l)$$

CC BY NC SA

Technology Arts Sciences
TH Köln