Elektrische Netze

Leitungen - Welleneigenschaften

Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt

TH-Köln 2023

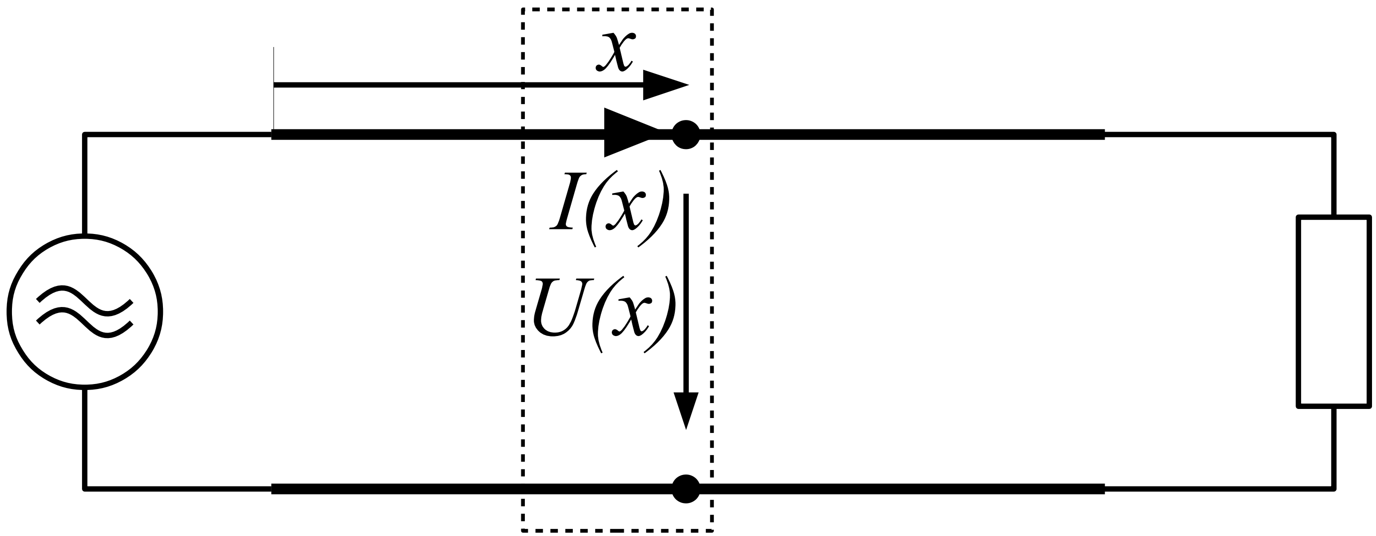
Welleneigenschaften

- Leitungsgleichungen
- Ausbreitungsmaß
- Wellenlänge
- Ausbreitungsgeschwindigkeit
- Hin- und rücklaufende Welle

Leitungseigenschaften

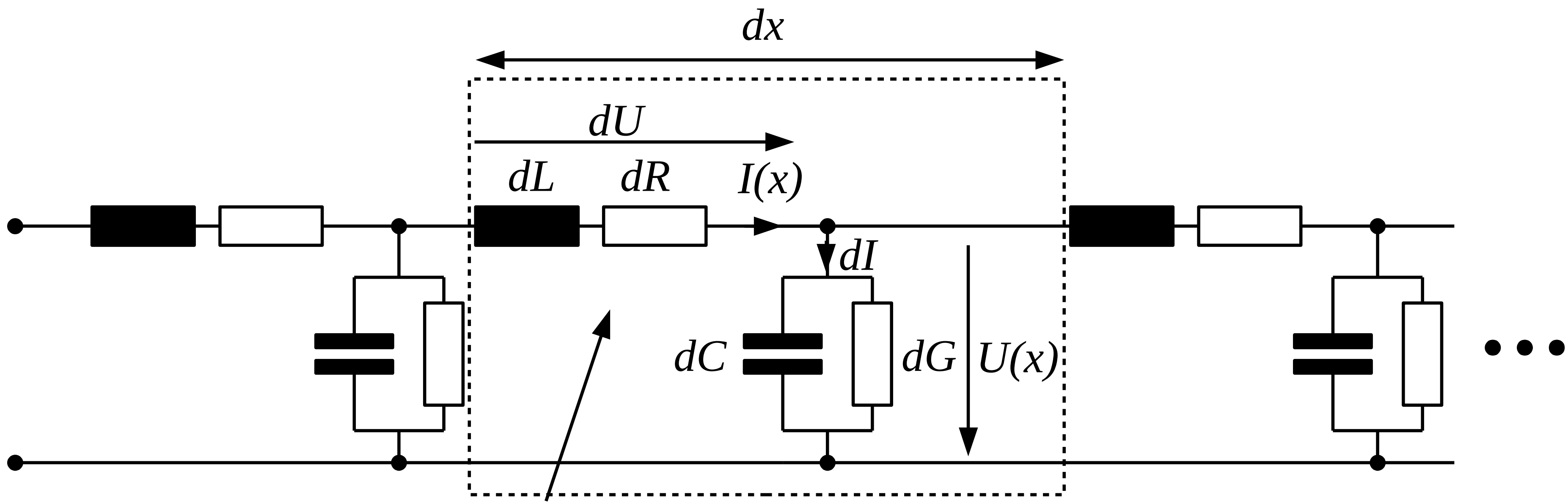
$U_A < U_E$ möglich !

Leitungseigenschaften



Spannungen und Ströme
auf der Leitung
sind ortsabhängig!

Leitungsgleichungen



Differenzialgleichungssystem:

$$-\frac{dU}{dx} = I(x) \cdot (R' + j\omega L')$$

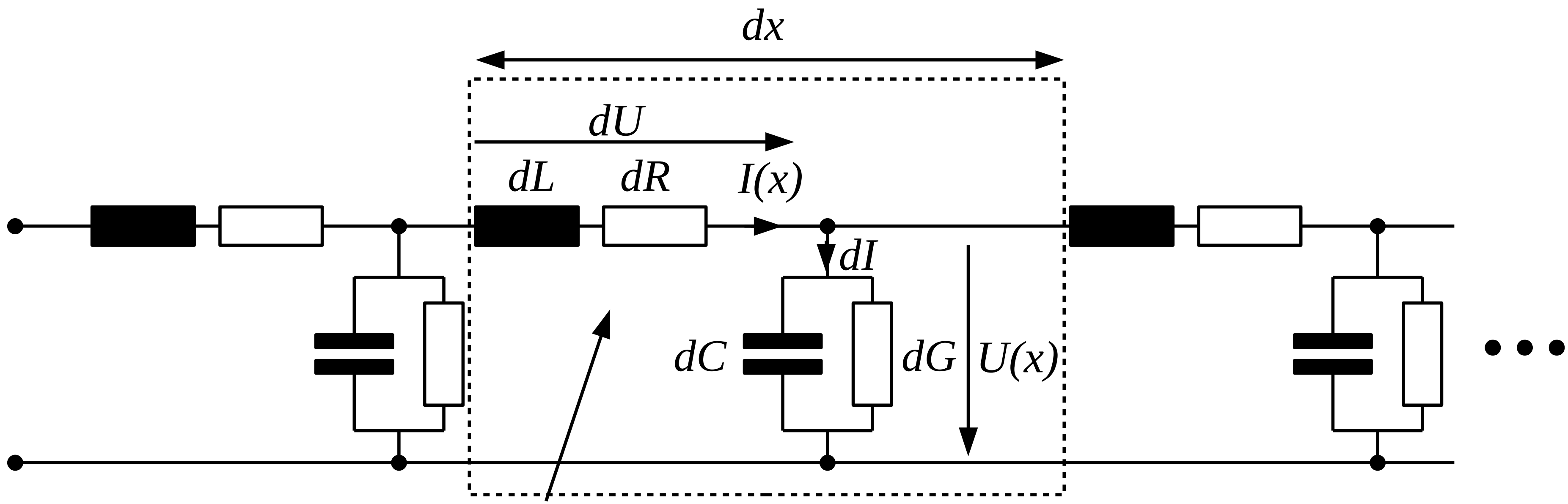
$$-\frac{dI}{dx} = U(x) \cdot (G' + j\omega C')$$

$$\frac{dU^2}{dx^2} = U(x) \cdot \gamma^2$$

$$\frac{dI^2}{dx^2} = I(x) \cdot \gamma^2$$

mit $\gamma^2 = (R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')$

Leitungsgleichungen



Differenzialgleichungssystem:

Allgemeine Lösung:

$$U(x) = U_1 \cdot e^{-\gamma x} + U_2 \cdot e^{\gamma x}$$

$$I(x) = I_1 \cdot e^{-\gamma x} + I_2 \cdot e^{\gamma x}$$

mit $\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')}$

Fortpflanzungsmaß

Konstanten aus Randbedingungen

$$U(x) = U_1 \cdot e^{-\gamma x} + U_2 \cdot e^{\gamma x}$$

Forpflanzungsmaß: $\gamma = \alpha + j\beta$

Komplexe Größe

Dämpfungsmaß

Wellenmaß

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta &\approx \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} \\ \alpha &\approx \frac{R'}{2} \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \cdot \sqrt{\frac{L'}{C'}} \end{aligned}\right\} \text{Für verlustarme Leitungen}$$

Fortpflanzungsmaß

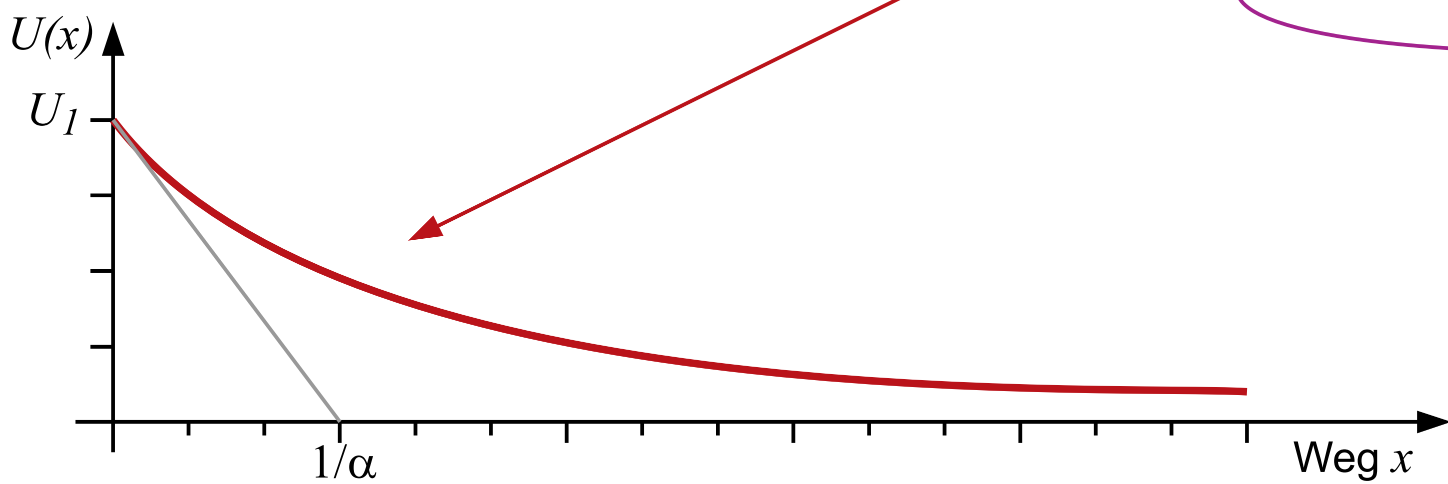
$$U(x) = \boxed{U_1 \cdot e^{-\gamma x}} + U_2 \cdot e^{\gamma x}$$

Forpflanzungsmaß: $\gamma = \alpha + j\beta$

Dämpfungsmaß

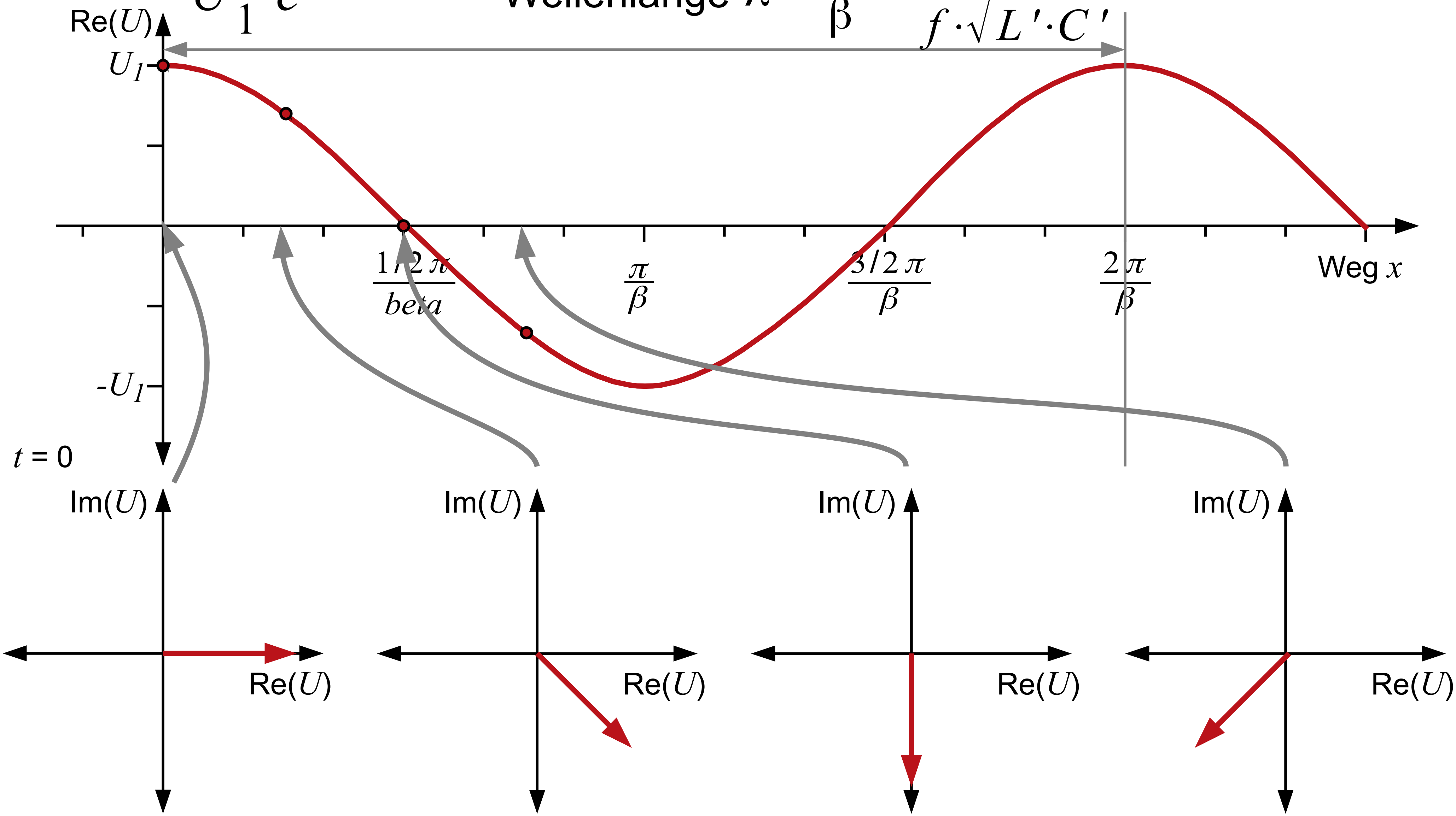
Wellenmaß

$$U_1 \cdot e^{-\gamma x} = U_1 \cdot e^{-\alpha x - j\beta x} = U_1 \cdot \boxed{e^{-\alpha x}} \boxed{\cdot e^{-j\beta x}}$$



Wellenausbreitung

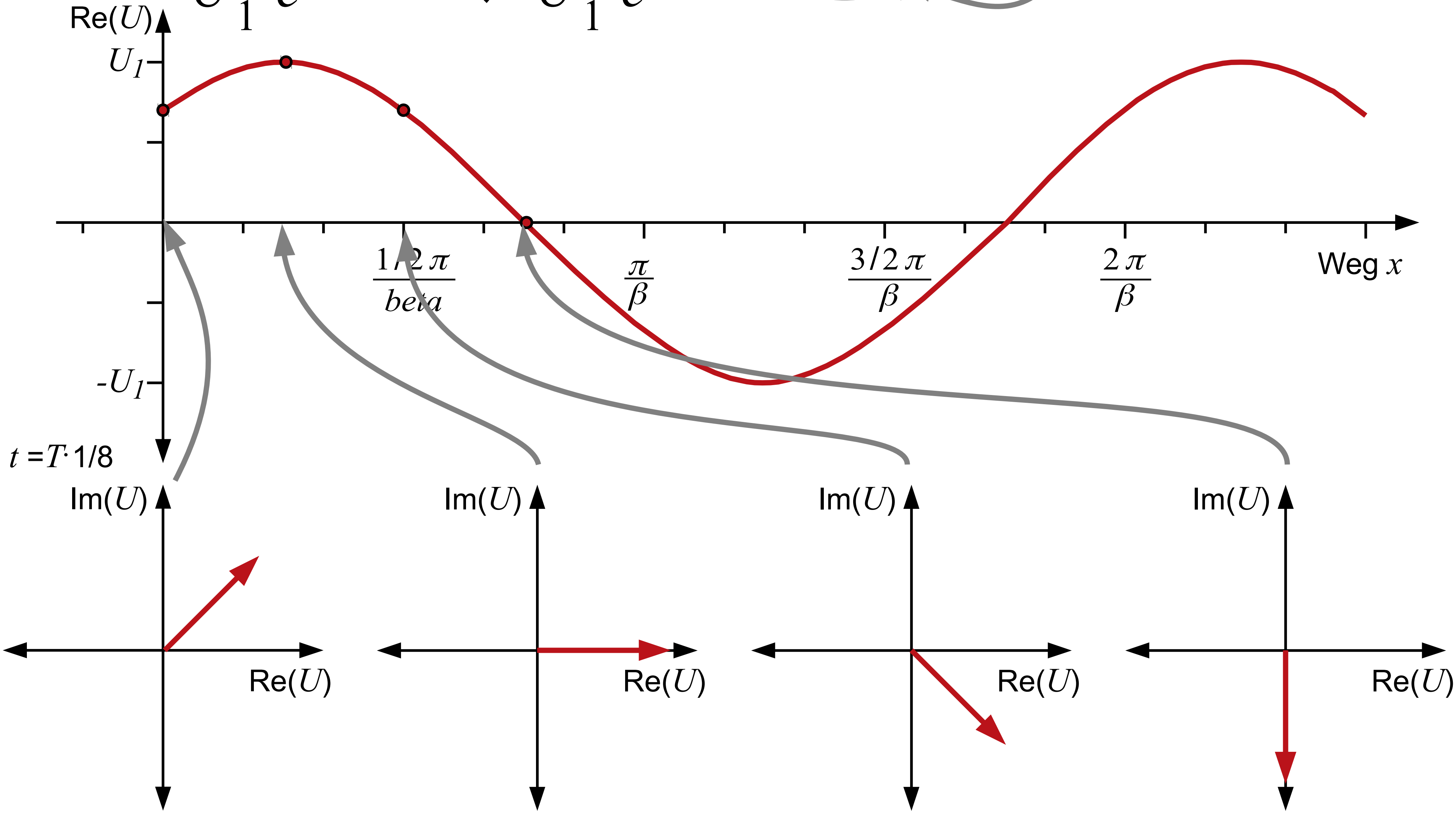
$$U_1 \cdot e^{-j\beta x} \qquad \text{Wellenlänge } \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f \cdot \sqrt{L' \cdot C'}}$$



Wellenausbreitung

$$U_1 \cdot e^{-j\beta x} \rightarrow U_1 \cdot e^{-j\beta x + j\omega t}$$

Zeit berücksichtigen



Technology Arts Sciences
TH Köln

Wellenausbreitung

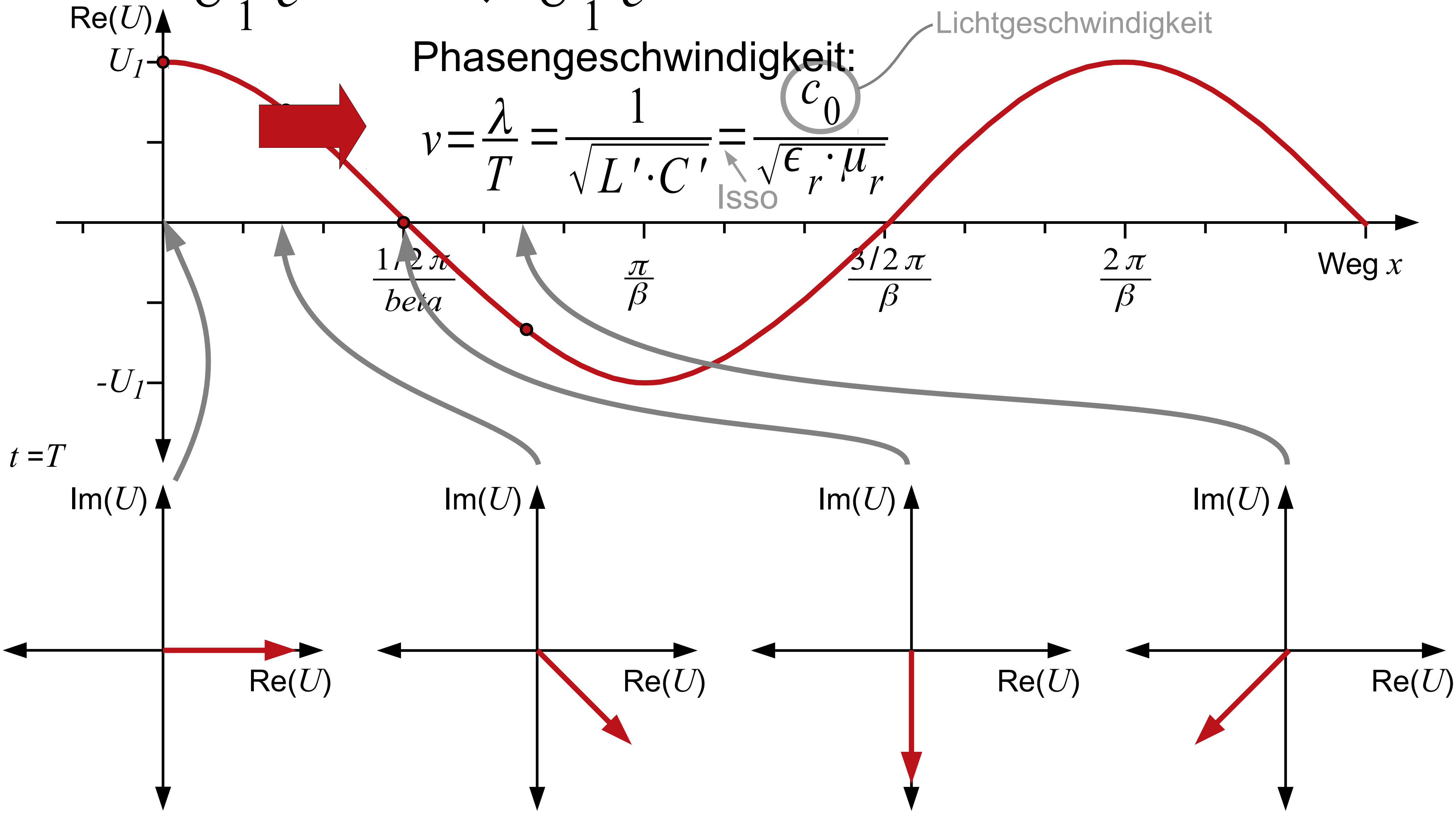
$$U_1 \cdot e^{-j\beta x} \rightarrow U_1 \cdot e^{-j\beta x + j\omega t}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}$$

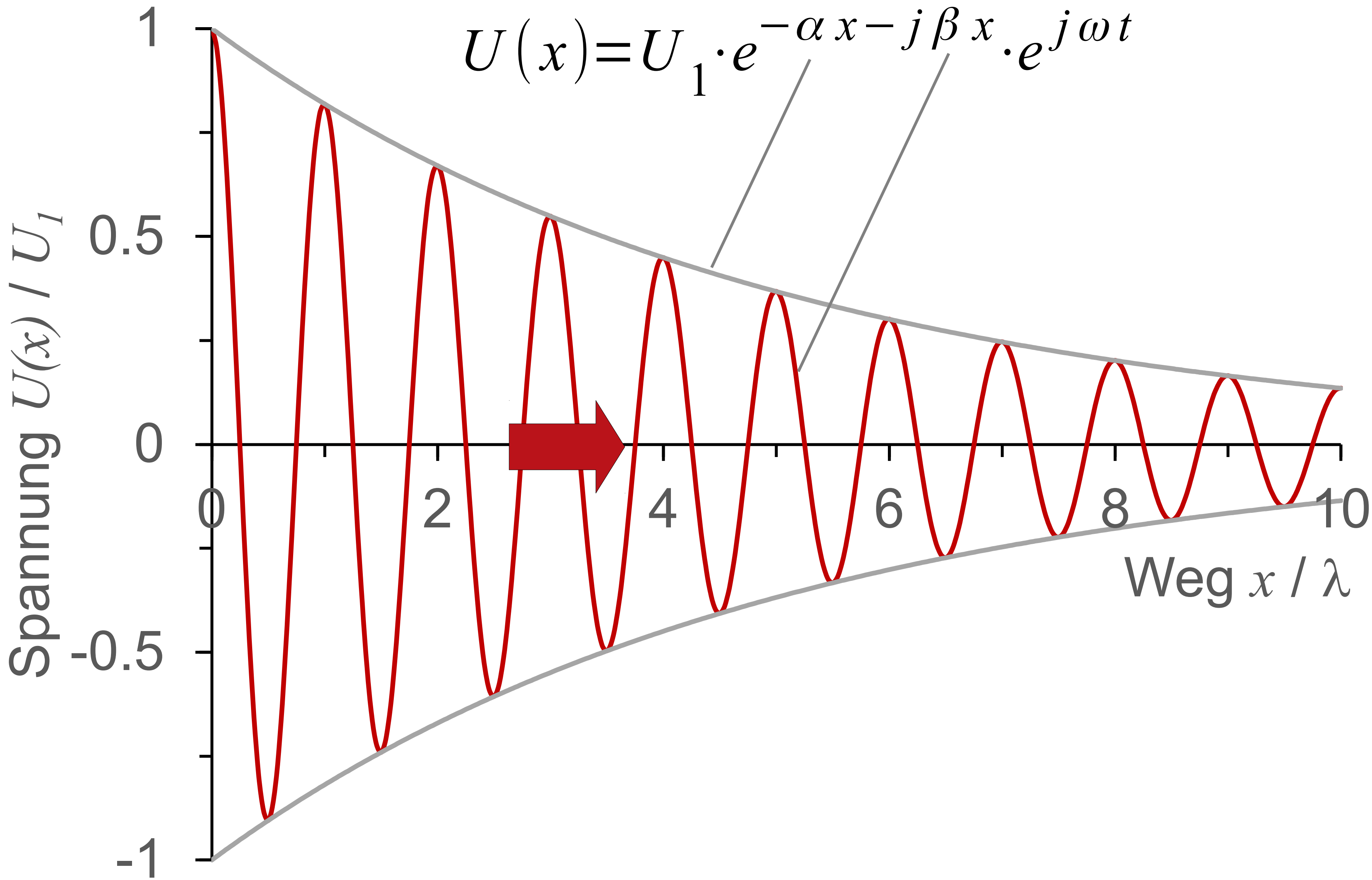
Lichtgeschwindigkeit

Isso



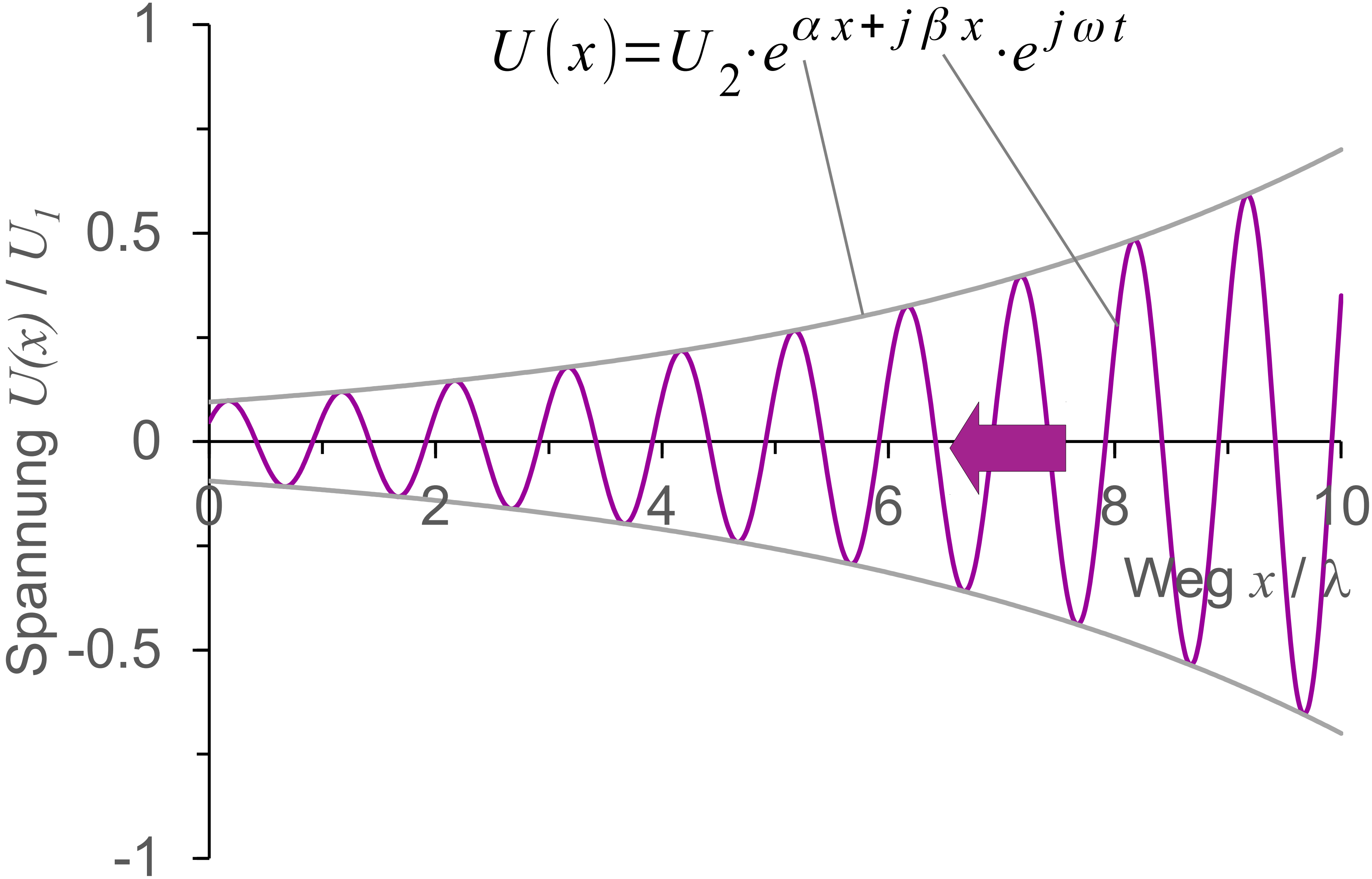
Technology Arts Sciences TH Köln

Wellenausbreitung

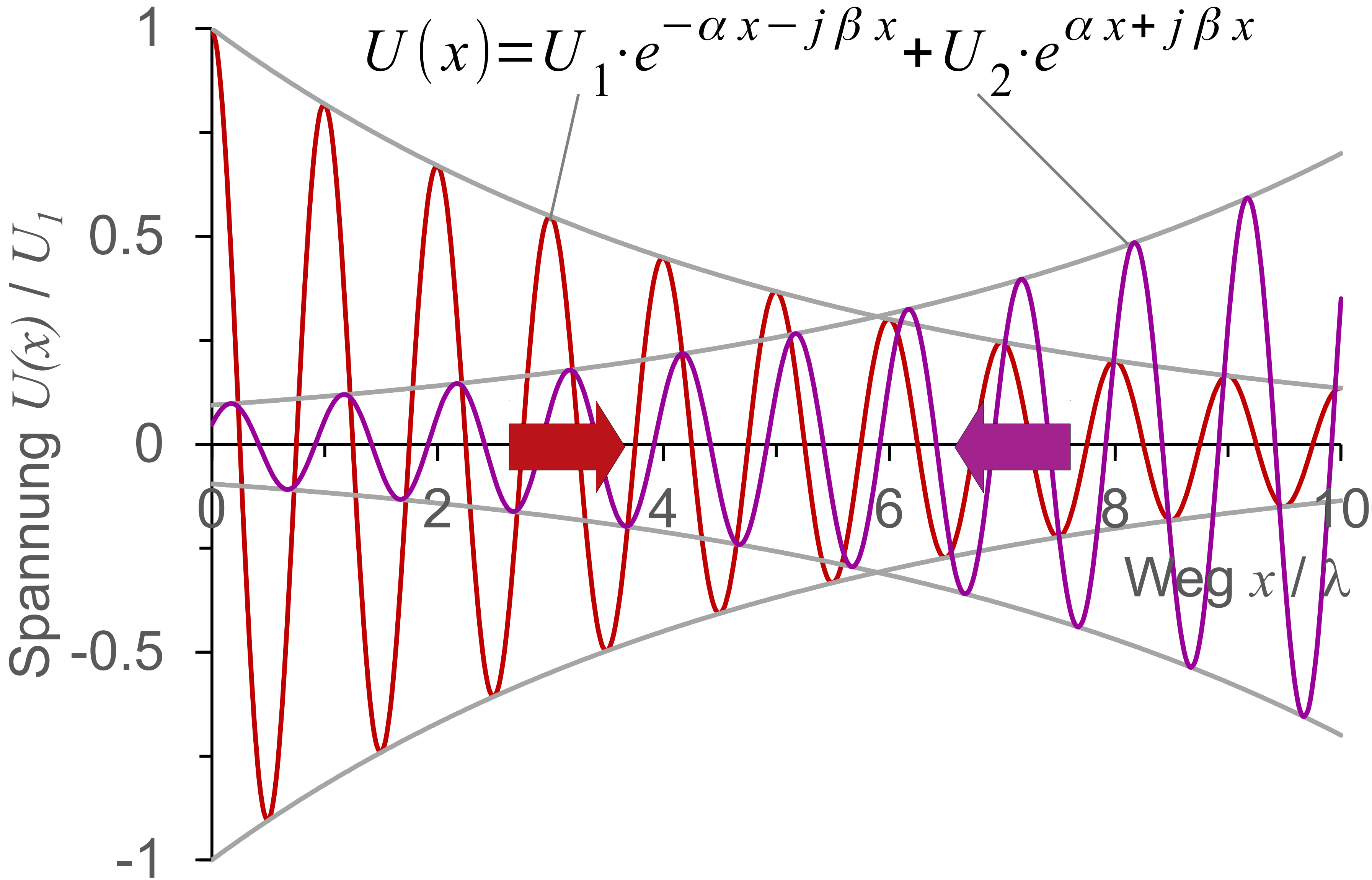


Technology Arts Sciences
TH Köln

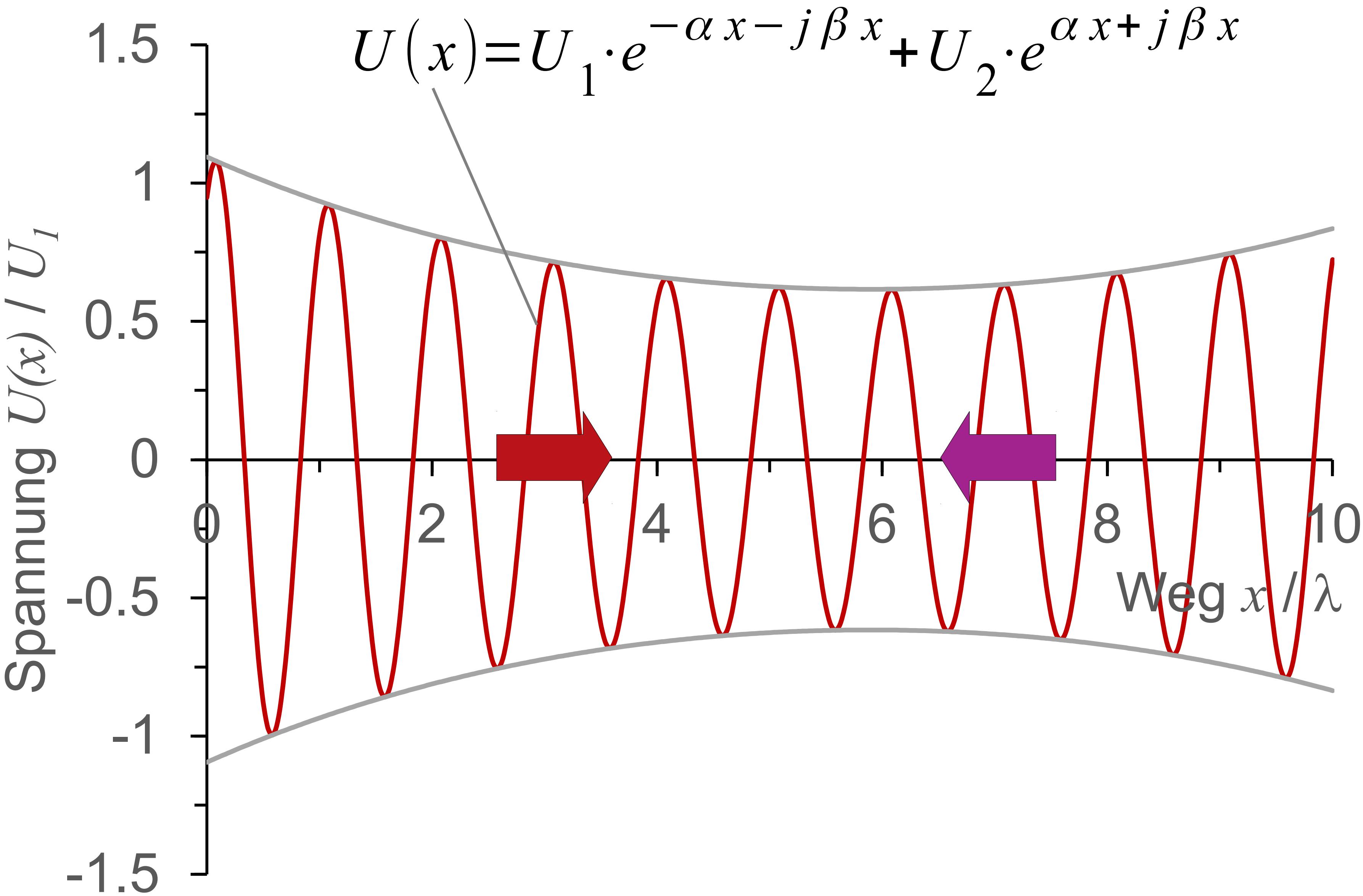
Wellenausbreitung



Wellenausbreitung



Wellenausbreitung



Kontakt

Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt
Professur Elektrische Netze
Fakultät für Informations-, Medien- und Elektrotechnik (F07)
Technische Hochschule Köln
Betzdorferstraße 2, Raum ZO 9-19
50679 Köln, Deutschland
Tel. +49 221 8275 2020
eberhard.waffenschmidt@th-koeln.de
https://www.th-koeln.de/personen/eberhard.waffenschmidt/

Anhang

Herleitung Leitungsgleichungen

$$-\frac{dU}{dx}=I(x)\cdot\left(\frac{dR}{dx}+j\omega\frac{dL}{dx}\right)$$

$$-\frac{dU}{dx}=I(x)\cdot(R'+j\omega L')$$

$$-\frac{dI}{dx}=U(x)\cdot\left(\frac{dG}{dx}+j\omega\frac{dC}{dx}\right)$$

$$-\frac{dI}{dx}=U(x)\cdot(G'+j\omega C')$$

$$-\frac{dU^2}{dx^2}=\frac{dI}{dx}\cdot(R'+j\omega L')$$

$$\frac{dU^2}{dx^2}=U(x)\cdot(R'+j\omega L')\cdot(G'+j\omega C')$$

$$\frac{dU^2}{dx^2}=U(x)\cdot\gamma^2 \quad \text{mit} \quad \gamma^2=(R'+j\omega L')\cdot(G'+j\omega C')$$

$$U(x)=U_1\cdot e^{-\gamma x}+U_2\cdot e^{+\gamma x}$$

$$-\frac{dI^2}{dx^2}=\frac{dU}{dx}\cdot(G'+j\omega C')$$

$$\frac{dI^2}{dx^2}=I(x)\cdot(R'+j\omega L')\cdot(G'+j\omega C')$$

$$\frac{dI^2}{dx^2}=I(x)\cdot\gamma^2 \quad \text{mit} \quad \gamma^2=(R'+j\omega L')\cdot(G'+j\omega C')$$

$$I(x)=I_1\cdot e^{-\gamma x}-I_2\cdot e^{+\gamma x}$$

Vereinfachung Phasenmaß

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')}$$

$$= \sqrt{R'G' - \omega^2 L'C' + j\omega(G'L' + R'C')}$$

Verlustlos: $R' \rightarrow 0, \quad G' \rightarrow 0$

$$\gamma = \sqrt{\cancel{R'G'} - \omega^2 L'C' + j\omega(\cancel{G'}L' + \cancel{R'}C')}$$

$$\gamma \approx \sqrt{-\omega^2 L'C'} = j\omega \cdot \sqrt{L'C'} \;\Rightarrow \beta \approx \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'}$$

Vereinfachung Dämpfungsmaß

$$\gamma=\sqrt{R'G'-\omega^2 L'C'+j\,\omega(G'L'+R'C')}$$

Für verlustarme Leitungen

$$\sqrt{z}=\sqrt{x+\mathrm{i}y}=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}}+\mathrm{i}\cdot\operatorname{sgn}(y)\cdot\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right)$$

https://mathepedia.de/Potenzen_und_Wurzeln.html

$$\Re(\gamma)=\sqrt{\frac{\sqrt{(\cancel{R'G'}-\omega^2 L'C')^2+(\omega(G'L'+R'C'))^2}+R'G'\cancel{-\omega^2 L'}C'}{2}}$$

$$\Re(\gamma)\approx\sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2 L'C')^2+(G'\cdot\omega L'+R'\cdot\omega C')^2}-\omega^2 L'C'}{2}}$$

$$\Re(\gamma)\approx\sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2 L'C')^2+\omega^2\cdot L'C'\cdot\left(G'\cdot\sqrt{\frac{L'}{C'}}+R'\cdot\sqrt{\frac{C'}{L'}}\right)^2}-\omega^2 L'C'}{2}}$$

$$\Re(\gamma)\approx\sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2 L'C')^2+\frac{(\omega^2\cdot L'C')^2}{\omega^2\cdot L'C'}\cdot\left(G'\cdot\sqrt{\frac{L'}{C'}}+R'\cdot\sqrt{\frac{C'}{L'}}\right)^2}-\omega^2 L'C'}{2}}$$

$$\Re(\gamma)\approx\omega\cdot\sqrt{L'C'}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\omega^2\cdot L'C'}\cdot\left(G'\cdot\sqrt{\frac{L'}{C'}}+R'\cdot\sqrt{\frac{C'}{L'}}\right)^2}-1}{2}}$$

Na gut, ich glaube die Vereinfachungen bei Moser mal...

$$\alpha\approx\frac{R'}{2}\cdot\sqrt{\frac{C'}{L'}}+\frac{G'}{2}\cdot\sqrt{\frac{L'}{C'}}$$